MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
21.11.2002

6. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

In der Enzymkinetik spielt die sogenannte Michaelis-Menten Gleichung eine wichtige Rolle. Die Umwandlungsgeschwindigkeit y steht dabei mit der Konzentration x des Substrats näherungsweise in dem Zusammenhang

$$y(x) = \frac{ax}{x+b},$$

wobei a und b positive Konstanten sind.

(i) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von y auf $[0, \infty)$.

(ii) Wo ist y minimal, wo maximal ? Was passiert für $x \to \infty$?

(iii) Zeichnen Sie $y(x)$ qualitativ.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Ertragsgesetz von Mitscherlich: Der Ertrag einer Pflanze ist der Gehalt einer Pflanze an einem bestimmten Stoff pro Einheit Trockenmasse. Man bietet der Pflanze zusätzlich zu dem natürlichen Gehalt im Boden die Menge x dieses Stoffes an. Es stellt sich nach einiger Zeit in der Pflanze der Ertrag y ein. Der Ertrag ist eine Funktion der angebotenen Stoffmenge, d.h. $y = y(x)$. Das Ertragsgesetz lautet

$$\frac{d}{dx} y(x) = c(a - y(x))$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = a + b \exp(-cx)$ für beliebige reelle Konstanten b die Differentialgleichung löst.

(ii) Bestimmen Sie b so, dass die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ erfüllt ist.

(iii) Geben Sie nun die Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2 - y(x), \ y(0) = 1$$

an. Diskutieren Sie das Monotonieverhalten und das Grenzverhalten für $x \to \infty$. Was bedeutet dies für den Ertrag der Pflanze ?

Aufgabe 3

Bei der C^{14}-Methode zur Altersbestimmung nutzt man aus, daß in lebenden Organismen das Verhältnis von C^{14} und C^{12} einen festen Wert c_0 hat. In toten Organismen zerfällt das Isotop C^{12} praktisch nicht, während das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren zerfällt (d.h. nach 5760 Jahren ist nur noch ein die Hälfte des Isotops vorhanden). Im Nildelta wurde 1989 ein hölzerner Bootsbalken gefunden, bei dem das Verhältnis von C^{14} und C^{12} auf 75% von c_0 gesunken war. Bestimmen Sie das Alter des Balkens, indem Sie exponentiellen Zerfall zu Grunde legen.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 28.11.2002 bzw. 29.11.2002.