MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
28.11.2002

7. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

Der Blutalkoholspiegel B wird nach einem Modell in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion

$$B(t) = B_0 + B_1 \left(\frac{1}{1+at} - \frac{1}{1+bt} \right)$$

beschrieben. Dabei gelte für die Konstanten $B_0, B_1 > 0$ und $0 < a < b$.

(i) Welche Bedeutung hat B_0?

(ii) Wann ist der Blutalkoholspiegel maximal? Welcher Wert stellt sich langfristig ein?

(iii) Fertigen Sie eine qualitative Skizze von $B(t)$ an.

Aufgabe 2

Eine Population entwickele sich gemäß der Verhulst-Gleichung

$$\dot{x}(t) = x(t)(2 - x(t)) \text{ mit } x(0) = x_0 > 0.$$

(i) Bestimmen Sie die stationären Punkte $\overline{x}$ der Gleichung, also die Lösungen mit $x(t) = \overline{x}$.

(ii) Welches Monotonieverhalten besitzt $x(t)$?

(iii) Untersuchen Sie mit Hilfe der expliziten Lösung das Verhalten für $t \to \infty$.

Aufgabe 3

Die Michaelis-Menten-Gleichung lässt sich auch als Differentialgleichung auffassen, wenn man die Konzentration des Substrats als Funktion x der Zeit t betrachtet. Die Umwandlungsgeschwindigkeit ist dann die Ableitung von x nach der Zeit, also $\dot{x}(t)$, und es gilt

$$\dot{x}(t) = \frac{Ax(t)}{k + x(t)} \text{ mit } x(0) = x_0 > 0.$$

Dabei sind A und k positive Konstanten.

(i) Sei $x(t)$ eine Funktion, die

$$\frac{k}{A} \ln \left(\frac{x(t)}{x_0} \right) + \frac{1}{A}(x(t) - x_0) = t \text{ für alle } t \geq 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(ii) Beantworten Sie durch Analyse der Differentialgleichung die folgenden Fragen:

- Welches Monotonieverhalten besitzt $x(t)$?
- Welches Krümmungsverhalten besitzt $x(t)$?
- Was passiert für $t \to \infty$?

Fertigen Sie anhand dieser Resultate eine qualitative Skizze von $x(t)$ an.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 5.12.2002 bzw. 6.12.2002.