

8. Übung zu Mathematik für Biologen I

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie>

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) := -5x(x - 4)^2.$$

- (i) Zeichnen Sie den Graphen von f qualitativ, geben Sie die stationären Punkte und deren Stabilität an, und tragen Sie die Richtungspfeile der Evolutionen ein.
- (ii) Für welche Anfangswerte $x(0)$ besitzt die zugehörige Lösung einen Wendepunkt?
- (iii) Übertragen Sie die Ergebnisse in ein $(t, x(t))$ -Diagramm, indem Sie die Lösungen zu den Anfangswerten $-2, 1, 3, 6$ und den stationären Punkten qualitativ einzeichnen.

Aufgabe 2

Das folgende Modell beschreibt die Ausbreitung ansteckender Krankheiten in einer Population: Sei $I(t)$ der Anteil infizierter Individuen an der Gesamtpopulation zur Zeit t . Die Ansteckungsrate und die Genesungsrate werden als proportional zur Anzahl der Infizierten angenommen. Die Modellgleichung für die relative Anzahl der Infizierten lautet dann

$$\frac{d}{dt}I(t) = I(t)(1 - I(t)) - \mu I(t) \text{ mit } \mu > 0.$$

- (i) Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie deren Stabilität.
- (ii) Für welche Werte von μ verbleibt die Krankheit in der Population, d.h. wann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) > 0$? Wie kann man μ interpretieren?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $t > 0$ eine Stammfunktion $F(t)$ von

- (i) $f(t) = 1 + t + t^4$.
- (ii) $f(t) = \exp(t) + t^{3/2}$.
- (iii) $f(t) = t^{-2} - 2t^{-1} - 1 + \sqrt{t} + 3.5 t^{2.5}$.
- (iv) $f(t) = (5t + 4)^3$.
- (v) $f(t) = \exp(6t)$.

Dabei ist dies durch explizites Berechnen der Ableitung zu verifizieren.

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 12.12.2002 bzw. 13.12.2002.