MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

WS 2002/2003
12.12.2002

9. Übung zu Mathematik für Biologen I

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/biologie

Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels partieller Integration die folgenden Integrale

(i)

$$\int_1^2 x^3 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x\ ,$$

(ii)

$$\int_0^1 t^2 \exp(-t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

(iii)

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Aufgabe 2

Die physikalische Leistung L ist definiert als die momentane Abgabe von Energie pro Zeiteinheit. Sei $E(t)$ die gesamte bis zur Zeit t abgegebene Energie, dann ist also

$$L(t) = \dot{E}(t) \text{ bzw. } E(t) = \int_0^t L(s)\ ds.$$

Nehmen wir nun an, dass die Leistung eines Marathonläufers gemäß der Formel

$$L(t) = \frac{1}{2+\lambda t} \text{ mit } \lambda > 0$$

abnimmt. Wie groß ist dann die gesamte Energie, die er zum Zeitpunkt $t = 1$ abgegeben hat, also $E(1)$?

Aufgabe 3

Eine Population entwickele sich gemäß der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t) + (1 + \sin(t)), \qquad x(0) = 1.$$

Man kann zeigen, dass sich die Lösung als

$$x(t) = \exp(-t)\left(1 + \int_0^t (1+\sin(s))\exp(s) ds\right)$$

schreiben lässt.

(i) Berechnen Sie $\int_0^t \sin(s)\exp(s) ds$, indem Sie zweimal partiell integrieren.

(ii) Geben Sie mit Hilfe von (i) die Funktion $x(t)$ explizit an und zeigen Sie, dass die Differentialgleichung erfüllt ist.

(iii) Skizzieren Sie $x(t)$. Welches Verhalten stellt sich langfristig ein ?

Abgabe in den jeweiligen Übungsstunden am 19.12.2002 bzw. 20.12.2002.