MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
21.10.2003

1. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

`http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/dde`

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Lösung der retardierten Verhulstgleichung

$$\dot{x}(t) = 2x(t)(1 - x(t-1)), \; x(t) = 1/2 \text{ für } -1 \leq t \leq 0 \tag{1}$$

für $0 \leq t \leq 2$ mit der Methode der Schritte. Tragen Sie dann diese Lösung gemeinsam mit den stationären Punkten in ein $(t, x(t))$-Diagramm ein. Was für Unterschiede fallen Ihnen zu den gewöhnlichen Differentiagleichungen auf ?

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe betrachten wir die skalare, lineare retardierte Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r), x(t) = \sigma(t) \text{ für } -r \leq t \leq 0 \tag{2}$$

mit $a < 0$ und $|b| \leq -a$ sowie stetigen Anfangsdaten σ. Zeigen Sie, dass dann jede Lösung von (2) beschränkt ist indem Sie zuerst nachrechnen, dass die Funktion

$$V(t) := x^2(t) - a \int_{t-r}^{t} x^2(s)\, ds \text{ für } t > 0. \tag{3}$$

monoton fallend ist. Eine solche Funktion heißt Ljapunov-Funktion. Schliessen Sie dann aus der Beziehung $V(t) \leq V(0)$ die gewünschte Beschränktheit von $x(t)$. Was würde sich ändern, falls σ nicht länger als stetig vorausgesetzt würde ?

Aufgabe 3

In der Situation von Aufgabe 3 gelte nun zusätzlich $b > 0$.

(i) Weisen Sie nach, dass dann jede Lösung exponentiell gegen Null läuft für $t \to \infty$. Überlegen Sie sich dazu zunächst, dass eine Lösung von (2) der Gestalt $c\exp(\lambda t)$ mit $a < \lambda < 0$ existiert. Leiten Sie dann eine Gleichung für die Funktion $z(t) = x(t)\exp(-\lambda t)$ her und wenden das Ergebnis aus Aufgabe 2 an.

(ii) Setzt man die Zeitverzögerung r in (2) als sehr klein voraus, könnte man auf die Idee kommen den Verzögerungsterm nach ihr zur entwickeln und vermuten, dass Lösungen von (2) die gleichen Eigenschaften aufweisen wie Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b\left(x(t) - r\dot{x}(t) + \frac{r^2}{2}\ddot{x}(t)\right) \text{ mit } x(0) = \sigma(0). \tag{4}$$

Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall, wie im folgenden verdeutlicht werden soll:

Zeigen Sie, dass im Gegensatz zu Aufgabe 3(i) hier nicht alle Lösungen exponentiell gegen Null laufen, sondern dass sogar unbeschränkte Lösungen von (4) existieren.

Abgabe am 28.10.2003 in der Vorlesung.