

## 2. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/dde>

### Aufgabe 1

Beweisen Sie Lemma 7 der Vorlesung: Seien  $f, g_1, \dots, g_m$  gegeben, und sei  $F : [t_0, \beta[ \times C_D$  definiert als

$$F(t, \phi) = f(t, \phi(g_1(t) - t), \dots, \phi(g_m(t) - t)).$$

Dann gilt

- (i) Sind  $f, g_1, \dots, g_m$  stetige Funktionen, so erfüllt  $F$  die Stetigkeitsbedingung (CC)
- (ii) Erfüllt  $f = f(t, \psi_1, \dots, \psi_m)$  eine lokale Lipschitzbedingung der Form

$$\|f(t, \psi_1, \dots, \psi_m) - f(t, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_m)\| \leq L \max\{\|\psi_i - \tilde{\psi}_i\|, i = 1, \dots, m\},$$

so ist  $F$  lokal Lipschitzstetig.

**Tipp:** Man beachte, dass insbesondere  $\mathcal{E} \subset [t_0, \beta[ \times C_D$  zu zeigen ist.

### Aufgabe 2

In dieser Aufgabe untersuchen wir das folgende Räuber-Beute-System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (1 - x(t)/2)x(t) - x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + 2x(t-1)y(t-1)\end{aligned}$$

- (i) Berechnen Sie die stationären Lösungen des Systems.
- (ii) Schreiben Sie das System in der Form  $\dot{x} = F(t, x_t)$ . Welche Aussagen können Sie über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung machen? Findet Korollar 9 über globale Existenz Anwendung?
- (iii) Berechnen Sie mit der Methode der Schritte die explizite Lösung für  $0 \leq t \leq 1$  zu den Anfangsdaten  $x(t) = 1/2 \exp(t)$  und  $y(t) = 2 \exp(-t)$  für  $-1 \leq t \leq 0$ .

**Tipp:** Partialbruchzerlegung.

### Aufgabe 3

Die folgende Gleichung beschreibt das Verhalten eines mit sich selbst gekoppelten Neurons:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + qf(x(t-r)) + e, x(t) = \phi(t) \text{ für } -r \leq t \leq 0, \text{ mit } \phi \in \mathcal{C}$$

Dabei seien  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  mit  $\|f'\|_\infty \leq M$  und  $q, e \in \mathbb{R}$ .

- (i) Welche Aussagen können Sie über Existenz, Eindeutigkeit und Existenzintervall der Lösung machen?
- (ii) Sei jetzt zusätzlich  $\|f\|_\infty \leq M$ . Beweisen Sie, dass jede Lösung beschränkt ist.

**Tipp:** Variation der Konstanten.

**Abgabe am 11.11.2003 vor der Übungsstunde.**