MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
4.11.2003

2. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/dde

Aufgabe 1

Beweisen Sie Lemma 7 der Vorlesung: Seien $f, g_1, \ldots, g_m$ gegeben, und sei $F : [t_0, \beta[\times C_D$ definiert als

$$F(t,\phi) = f\left(t, \phi(g_1(t)-t), \ldots, \phi(g_m(t)-t)\right).$$

Dann gilt

(i) Sind $f, g_1, \ldots, g_m$ stetige Funktionen, so erfüllt F die Stetigkeitsbedingung (CC)

(ii) Erfüllt $f = f(t, \psi_1, \ldots, \psi_m)$ eine lokale Lipschitzbedingung der Form

$$\|f(t,\psi_1,\ldots,\psi_m) - f(t,\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_m)\| \le L \max\{\|\psi_i - \tilde{\psi}_i\|, i = 1,\ldots,m\},$$

so ist F lokal Lipschitzstetig.

Tipp: Man beachte, dass insbesondere $\mathcal{E} \subset [t_0, \beta[\times C_D$ zu zeigen ist.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe untersuchen wir das folgende Räuber-Beute-System

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t)/2)x(t) - x(t)y(t),$$
$$\dot{y}(t) = -y(t) + 2x(t-1)y(t-1)$$

(i) Berechnen Sie die stationären Lösungen des Systems.

(ii) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{x} = F(t, x_t)$. Welche Aussagen können Sie über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung machen ? Findet Korollar 9 über globale Existenz Anwendung ?

(iii) Berechnen Sie mit der Methode der Schritte die explizite Lösung für $0 \le t \le 1$ zu den Anfangsdaten $x(t) = 1/2 \exp(t)$ und $y(t) = 2\exp(-t)$ für $-1 \le t \le 0$.

Tipp: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 3

Die folgende Gleichung beschreibt das Verhalten eines mit sich selbst gekoppelten Neurons:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + qf(x(t-r)) + e, x(t) = \phi(t) \text{ für } -r \le t \le 0, \text{ mit } \phi \in \mathcal{C}$$

Dabei seien $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $\|f'\|_\infty \le M$ und $q, e \in \mathbb{R}$.

(i) Welche Aussagen können Sie über Existenz, Eindeutigkeit und Existenzintervall der Lösung machen ?

(ii) Sei jetzt zusätzlich $\|f\|_\infty \le M$. Beweisen Sie, dass jede Lösung beschränkt ist.

Tipp: Variation der Konstanten.

Abgabe am 11.11.2003 vor der Übungsstunde.