MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
18.11.2003

3. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/dde

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe betrachten wir die lineare, skalare, retartierde Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-1) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Wir wollen das Lösungsverhalten der charakteristischen Gleichung genauer untersuchen, da dieses in Analogie zu der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen Aussagen über das Lösungsverhalten von (1) zulässt.

(i) Wie lautet die charakteristische Gleichung ?

(ii) Zeigen Sie zunächst: Ist λ Lösung der charakteristischen Gleichung, so auch $\bar{\lambda}$.

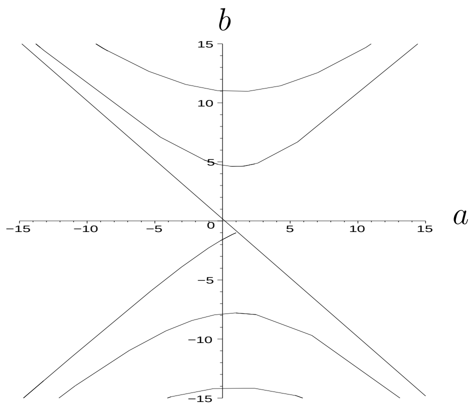
(iii) Bei der Asymptotik der Lösungen von (1) spielt genau wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die Frage nach dem Vorzeichen des Realteils der Lösungen der charakteristischen Gleichung eine zentrale Rolle. Dort, wo dieses Vorzeichen wechselt, tritt aus Stetigkeitsgründen eine rein imaginäre Lösung auf.

(a) Beweisen Sie: Ist $a = -b$, so existieren rein imaginäre Lösungen $\lambda = i\omega$ der charakteristischen Gleichung.

(b) Rechnen Sie nach, dass falls rein imaginäre Lösungen der Form $\lambda = i\omega$ existieren, folgende Parametrisierung gelten muss:

$$a = \omega \frac{\cos(\omega)}{\sin(\omega)}, \quad b = -\frac{\omega}{\sin(\omega)}$$

(c) Erläutern Sie, was folgende Aufteilung der (a, b)-Ebene bedeutet und wie die Grafik entstanden ist.



(iv) Für welche Parameterpaare (a, b) haben alle Lösungen der charakteristischen Gleichung negativen Realteil? (Dies ist der sogenannte Stabilitätsbereich der Gleichung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 2

Es ist bekannt, dass die Lösung zu der linearen, skalaren Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-1), \ \ x(t) = \phi(t) \text{ für } t \in [-1,0] \text{ mit } \phi \in C^\infty([-1,0], \mathbb{R}) \tag{2}$$

nicht unbedingt stetig differenzierbar in $t = 0$ sein muss.

(i) Leiten Sie eine Bedingung an ϕ her, die garantiert, dass x stetig differenzierbar in $t = 0$ ist. Ist x dann auch in $C^1(-1, \infty)$?

(ii) Leiten Sie Bedingungen an ϕ her, die garantieren, dass $x \in C^\infty(-1, \infty)$ ist.

(iii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösung der Gleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)) + ax(t-1), x(t) = t \text{ für } t \in [-1, 0]$$

stetig differenzierbar in 0 ? Welche Aussage können Sie über globale Existenz treffen ?

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wollen wir noch einmal sehen, dass die Stetigkeitsbedingung (CC) nicht impliziert, dass F stetig ist:

Definiere

$$\begin{aligned} F: \ [0,1] \times C^1([0,1], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (t, x) \qquad &\mapsto \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Dabei werde der Raum $C^1([0,1], \mathbb{R})$ als Unterraum von $C^0([0,1], \mathbb{R})$ aufgefasst und mit der Supremumsnorm versehen. Zeigen Sie

(i) Für alle $x \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ ist die Abbildung $t \mapsto F(t, x)$ stetig.

(ii) Die Abbildung $x \mapsto F(t, x)$ ist nicht stetig.

Abgabe am 25.11.2003 vor der Übungsstunde.