MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
2.12.2003

4. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

http://www.mi.uni-koeln.de/∼mkurth/dde

Auf diesem Übungsblatt ist ein Teil der Aufgaben mit MATLAB zu lösen, die entsprechenden Lösungen können als Ausdruck oder aber auch per eMail an mkurth@mi.uni-koeln.de abgegeben werden.

Aufgabe 1

(i) Beschäftigen wir uns zunächst mit der linearen Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) - \frac{\pi}{2}x(t-1) \text{ mit } a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

mit $x(t) = \phi(t)$ für $-1 \leq t \leq 0$

(a) Welche qualitativen Aussagen in Abhängigkeit von a können Sie über die Lösungen treffen ? In welchen Fällen würden Sie die Null-Lösung asymptotisch stabil, stabil oder instabil nennen ?

(b) Zeichnen Sie mit MATLAB Phasenportraits indem Sie $x(t)$ gegen $\dot{x}(t)$ auftragen für $a = -0.1, 0, 0.1$. Wählen Sie dazu als Anfangsfunktion jeweils $\phi(t) = 0.5$ und $\phi(t) = 0.1$ und tragen beide Lösungen in das gleiche Phasenportrait. Belegen die Phasenportraits Ihre Aussage aus (i) ?

(ii) Betrachten wir nun die nichtlineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = 0.1x(t) - \frac{\pi}{2}x(t-1) - x(t)^3 \tag{2}$$

Zeichnen Sie mit MATLAB Phasenportraits für $\phi(t) = 0.1$ und $\phi(t) = 1$. Berechnen Sie die zugehörige Lösung für $t \in [0, 100]$. Erkennen Sie einen stabilen Zustand ?

Aufgabe 2

Die folgende Gleichung beschreibt eine Population von Schmeißfliegen:

$$\dot{x}(t) = px(t-\tau)e^{-\gamma x(t-\tau)} - \delta x(t)$$

Dabei ist $x(t)$ die Größe der Population zur Teit t, p die pro-Kopf-Rate, mit der Eier produziert werden, δ die Sterberate, $1/\gamma$ die maximale Reproduktuionsrate und τ die Zeit bis zum Schlüpfen.

(i) Leiten Sie eine Bedingung her, unter der ein endemisches (d.h. positives) Gleichgewicht existiert.

(ii) Sei nun $p = 1, \delta = 0.1$. Ändert sich die Stabiltät des endemischen Gleichgewichts, wenn die Zeitverzögerung τ bzw. der Parameter γ zwischen 0 und ∞ variiert ? Berechnen Sie dazu Lösungen zu verschiedenen Parameterwerten mit MATLAB, halten Sie die anderen Parameter fest. Sinnvoll ist es auch in der Nähe des Gleichgewichtpunktes zu starten.

Bitte wenden !

Aufgabe 3

Sei $X = C_0[0,\infty]$ der Banachraum der stetigen Funktionen, die für $x \to \infty$ verschwinden- versehen mit der Supremumsnorm. Für jedes $t > 0$ definieren wir dann den Operator $T(t)$ auf X wie folgt:

$$[T(t)f](x) = f(x+t) \text{ für } f \in X.$$

(i) Zeigen Sie, dass durch $T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe gegeben ist.

Tipp: Zum Nachweis der starken Stetigkeit überlege man sich einerseits die gleichmäßige Stetigkeit von f auf einem beschränkten Intervall $[0,T]$, andererseits, welches Verhalten $f \in X$ für $t \to \infty$ aufweist.

(ii) Wie lautet der infinitesimale Generator und wo ist er definiert ?

Abgabe am 9.12.2003 vor der Übungsstunde.