MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
16.12.2003

5. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/dde

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir ein Beispiel für einen Operator T mit "eigenartigem" Spektrum betrachten. Dazu definieren wir den Multiplikatonsoperator als

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad f \mapsto Tf \text{ mit } Tf(t) = tf(t).$$

Dabei bezeichnet $C([0,1])$ den Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$.

(i) Zeigen Sie, dass der Operator keine Eigenwerte besitzt, also $\sigma_p(T) = \emptyset$

(ii) Überlegen Sie sich dann, dass $T - \lambda I$ invertierbar ist falls $\lambda \notin [0,1]$.

(iii) Was passiert für $\lambda \in [0,1]$? Wie lautet dann $\sigma(T)$?

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $N \in \mathbb{N}$, $\Delta t = \frac{1}{N}$ und $u^{\Delta t}(i)$, $i \in \mathbb{N}$ der durch das Euler-Cauchy Verfahren für die Lösung $\bar{u}$ der Aufgabe

$$\dot{u} \;=\; Au,\ u(0) = \alpha \in \mathbb{R}^n$$

gelieferte Näherungswert an der Stelle $t = i$.

(i) Zeigen Sie $u^{\Delta t}(i) = (I + \Delta t A)^{iN}\alpha$.

(ii) Es sei nun A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Für alle Eigenwerte λ von A gelte $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Wie klein ist Δt zu wählen, damit $\lim_{i\to\infty} \bar{u}(i,\alpha) = \lim_{i\to\infty} u^{\Delta t}(i)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 3

Sei $c(t)$ die Konzentration weisser Blutkörperchen im Blut, die Einheit sei Zellen/mm^3. Dabei verliert der Körper die Zellen proportional zu der momentan vorhandenen Konzentration mit einer Rate γ [Tag^{-1}]. Nach dem Verlust der Zellen dauert es eine Zeitspanne von T Tagen bis das Knochenmark neue Zellen in den Blutkreisklauf gibt. Daher nehmen wir an, dass der Zufluß λ von weissen Blutkörperchen von der Konzentration zu einem früherem Zeitpunkt abhängt, genauer von $c(t-T)$. Dies führt auf eine Modellgleichung der Form

$$\dot{c}(t) = \lambda(c(t-T)) - \gamma c(t) \text{ mit } \lambda(c) = \frac{\lambda a^m c}{a^m + c^m}$$

nach einem Vorschlag von Glass und Mackey für λ,wobei $\lambda, a, g > 0$.

(i) Sei nun $\gamma = 0.1, \lambda = 0.2, m = 10, a = 1$. Plotten Sie mit MATLAB das $(t, c(t))$-Diagramm für $T \le t \le 600$ zu den Anfangsdaten $c(t) = 0.1$ für $-6 \le t \le 0$ für $T = 6$ und $T = 20$. Welches Diagramm könnte Leukämie beschreiben ?

(ii) Sei nun $\gamma = a = 1, \lambda = 2$ und $T = 2$. Plotten Sie mit MATLAB die $(c(t), c(t-2))$-Diagramm für $2 \le t \le 300$ zu den Anfangsdaten $c(t) = 1.2$ für $-2 \le t \le 0$ für $m = 6, 8, 10, 12$. **Tipp:** Aufgabe 3.3.1 im Skriptum zur Matlab-Übung.

Abgabe am 13.1.2004 vor der Übungsstunde. Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Jahr 2004 !