MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, M. Kurth, A. Gail

WS 2003/2004
20.1.2004

6. Übung zu Gewöhnliche, retardierte und Differential-Algebraische Differentialgleichungen

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/dde

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns noch einmal mit der Situation aus Aufgabe 2 der 1. Übung. Dort haben wir gezeigt, dass

$$V(t) := x^2(t) - a \int_{t-1}^{t} x^2(s)\, ds \text{ für } t > 0.$$

ein Ljapunov-Funktional für die Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-1) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

ist, falls $a < 0, |b| < |a|$, also dass V längs Lösungen abnimmt. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es solch ein Funktional auch für die numerischen Lösungen gibt: Diskretieren Sie dazu (1) mit dem Euler-Cauchy Verfahren und Schrittweite $\triangle t = 1/M > 0$. Für die Iterierten $x_i, i \in \mathbb{N}$ definieren wir dann

$$V_{\triangle t}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-M}) = x_n^2 - a \sum_{i=1}^{M} \triangle t x_{n+1-i}^2.$$

(i) Überlegen Sie sich kurz, wie $V_{\triangle t}$ aus V entstanden ist.

(ii) Zeigen Sie: Die Folge $W_n := V_{\triangle t}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-M})$ ist monoton fallend für $\triangle t$ hinreichend klein.

Aufgabe 2

In der Theorie der retardierten Differentialgleichungen spielen sogenannte langsam oszillierende Lösungen eine wichtige Rolle, bei denen der Abstand zweier Nullstellen größer als die Zeitverzögerung ist. Oft sind beispielsweise langsam oszillierende periodische Lösungen stabil und geben so Auskunft über die Langzeitdynamik des Systems. Betrachten wir nun die Gleichung

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)(1 + x(t)), x(t) = \phi(t) \text{ auf } [-1, 0]. \tag{2}$$

Es gelte $\alpha > 0$ und $\phi(t) < 0$ für $-1 < t < 0$, sowie $\phi(0) = 0$. Zeigen Sie: Die Lösung ist langsam oszillierend, indem Sie wie folgt vorgehen:

(i) $x(t) > -1$ für alle $t > 0$

(ii) x nimmt ein lokales Maximum bei $t = 1$ an.

(iii) Entweder $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$ oder $x(t_1) = 0$ mit $1 < t_1 < \infty$.

(iv) Falls $t_1 < \infty$, welche Aussagen lassen sich über die Nullstelle t_2 treffen ? Welche Eigenschaften hat $x(t)$ auf $[t_1, t_2]$?

(v) Was passiert für $t \to \infty$?

(vi) Man kann zeigen, dass für $\alpha > 1$ unendlich viele Nullstellen existieren, skizzieren Sie die Lösung in diesem Fall.

Bitte wenden !

Aufgabe 3

Wichtige Leistungen des menschlichen Gehirns wie Erinnerungsvermögen oder Kognition beruhen auf der rekurennten Kopplung von Neuronen. Das folgende Modell beschreibt die Dynamik eines einzelnen Neurons

$$\begin{aligned}
\tau \dot{u}(t) &= -u(t) + qg(v(t-T)) + e \\
\dot{v}(t) &= c\left(w(t) + v(t) - \frac{1}{3}v^3(t)\right) + \gamma u(t) \\
\dot{w}(t) &= (a - v(t) - bw(t))/c
\end{aligned}$$

Dabei beschreibt

- $u(t) \in \mathbb{R}$ das totale postsynaptische Potential des Neurons zur Zeit t
- $\tau > 0$ ist eine Zeitkonstante, die die Dynamikeigenschaften der Zellmembran beschreibt
- q beschreibt die synaptische Kopplung des Neurons mit sich selbst. $q > 0$ ($q < 0$) falls die Kopplung exzitatorisch (inhibitorisch).
- g ist eine Transferfunktion zwischen dem präsyanptischen und dem postsynaptischen Potential.
- $v(t) \in \mathbb{R}$ ist das Membranpotential am Axonhügel des Neurons zur Zeit t, $w(t)$ ist eine Hilfsvariable
- $a, b, c > 0$ sind Parameter, die die Dynamik des Potentials v kontrollieren
- γ beschreibt die Leitfähigkeit der Membran
- $T > 0$ ist eine Zeitverzögerung, die die synaptische, dentritische und axonale Ausbreitungszeit berücksichtigt
- $e \in \mathbb{R}$ ist ein äusseres Signal

In Abhängigkeit von der Parameterkonstellation verändert sich das Oszillationsverhalten sehr stark, wie wir im Folgenden sehen werden:

Seien $a = b = 0.9$, $c = 2.0$, $\tau = 20$ ms, $T = 30$ ms und $\gamma = 1.0$ sowie

$$g(v) = 1/(1 + \exp(-4v)).$$

Berechnen Sie mit MATLAB die folgenden Lösungen (als Startwert können Sie den Einsvektor verwenden) und plotten Sie $u(t)$ und $v(t)$ in ein gemeinsames Diagramm für $t = 500, ..., 1500$.

(i) $q = -2.0$, $e = -2.8$ ("Ruhezustand")

(ii) $q = 0.1$, $e = -2.5$ ("Spiking")

(iii) $q = -1.0$, $e = -2.5$ ("Bursting")

Dieses Verhalten kann man in Teilen auch analytisch erklären, Interessierte seien auf den Artikel

- F. Giannakopoulos, Ch. Hauptmann und A. Zapp, Bursting activity in a model of a neuron with recurrent synaptic feedback Fields Institute Communications, Volume 29, pp. 147-159, 2001.

verwiesen, welcher unter `http://ais.gmd.de/INDY/fotios/publistfotios.html` zum Download bereit steht.

Abgabe am 27.1.2004 vor der Übungsstunde.