Diplomarbeit

Nichtlineare Schrödingergleichungen in der Faseroptik

vorgelegt von
Michael Kurth

unter der Anleitung von
Prof. Dr. Tassilo Küpper

Mathematisches Institut der Universität zu Köln
Sommersemester 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Signalausbreitung in Glasfasern, die für die Datenübertragung verwendet werden. Aufgrund des rasanten Wachstums der Telekommunikation, insbesondere des Internets, ist dieses Thema von großer Bedeutung. Heutzutage werden riesige Datenmengen über große Entfernungen übertragen, z.B. bei transatlantischen Verbindungen. Daher ist man daran interessiert, möglichst hohe Übertragungsraten über größtmögliche Entfernungen zu erreichen. Es hat sich dabei gezeigt, daß die Glasfaser für diesen Zweck das beste Medium ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, die mathematischen Hintergründe der Faseroptik näher zu beleuchten, sowie die fundamentalen Gleichungen herzuleiten. Dabei wird sich zeigen, daß die beschreibenden Gleichungen Modifikationen der Nichtlinearen Schrödingergleichung (NLS) sind. Diese ist eine der wenigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die integrabel ist. Als Lösungen treten spezielle nichtlineare Wellen auf, die sogenannten Solitonen. Ihre große Bedeutung liegt darin, daß sie stabil gegen Störungen sind und ihre Amplitude sich während der Ausbreitung reproduziert; desweiteren sind Solitonen robust gegen Kollisionen mit anderen Solitonen. Aus diesen Gründen basieren heutzutage die meisten optischen Übertragungssysteme auf Solitonen, daher wird sich diese Arbeit ausschließlich mit solchen Systemen beschäftigen.

Den Anfang der Betrachtung solcher Systeme machten Hasegawa und Tappert in ihrer Arbeit [1] aus dem Jahre 1973, in dem sie Solitonen als besonders geeignet für die Datenübermittlung vorschlugen. In einer Reihe von Arbeiten befaßten sich danach Hasegawa und Kodama mit der Herleitung mathematischer Gleichungen, die die Signalausbreitung beschreiben; diese sind auch Grundlage des ersten Teils dieser Arbeit (insbesondere Kapitel 3). Über die Modifikationen der NLS gibt es eine breit gefächerte Auswahl an Vorschlägen. Die in dieser Arbeit betrachteten Anpassungen beruhen größtenteils auf Untersuchungen von Turitsyn und diversen Koautoren.

Im folgenden soll der Aufbau dieser Arbeit vorgestellt werden:

In Kapitel 1 werden zunächst einige grundlegende Begriffe der Faseroptik geklärt und, ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen, eine einzelne nichtlineare Gleichung hergeleitet, die Grundlage dieser Arbeit ist. Desweiteren wird das zugehörige lineare Problem betrachtet. Dies kann einerseits als Einführung in die Problematik verstanden werden, andererseits werden hier bereits einige wichtige Eigenschaften erläutert.

Kapitel 2 erläutert die Annahmen, die zur Herleitung der nichtlinearen Schrödingergleichung (NLS), die die Signalausbreitung beschreiben wird, benötigt werden. Diese Annahmen haben zunächst physikalische Bedeutung, später wird deutlich, daß deren mathematische Konsequenzen unerläßlich für die Herleitung der NLS sind.

In Kapitel 3 wird ausgehend von den Annahmen aus Kapitel 2 die NLS hergeleitet. Desweiteren wird eine nichtlineare Schrödingergleichung höherer Ordnung (HNLS) hergeleitet, die als eine genauere Approximation verstanden werden kann.

Die Lösungen der NLS in Form von Solitonen werden in Kapitel 4 erklärt. Insbesondere wird dort die wichtige Unterscheidung zwischen „hellen“ und „dunklen“ Solitonen verdeutlicht. Es wird deutlich werden, daß helle Solitonen für die optischen Übertragungssysteme besser geeignet sind. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir daher die dunklen Solitonen vernachlässigen.

In Kapitel 5 wird die NLS dann modifiziert. Zunächst wird hier der Verlust in der Faser einbezogen, der durch Verstärker kompensiert werden kann. Man wird erkennen, daß die zugehörige Gleichung formal dem verlustfreien Fall entspricht. Desweiteren werden beschreibende Gleichungen im Falle des Dispersionsmangements und des Einsatzes von Phasenmodulatoren hergeleitet. Hierbei handelt es sich um die NLS mit einem zusätzlichen quadratischen bzw. periodischen Potential.

Kapitel 6 befaßt sich mit den verzweigungstheoretischen Untersuchungen der im vorherigen Kapitel hergeleiteten Gleichungen. Im Fall des quadratischen Potentials muß man unterscheiden, welches Vorzeichen dieses hat. Bei positivem Vorzeichen findet man einfache Eigenwerte der Linearisierung, und die Standardsätze lassen sich anwenden. Ist das Vorzeichen negativ, so sind bisher noch keine Verzweigungsresultate bekannt. Beim Betrachten des periodischen Potentials erkennt man, daß das zugehörige Spektrum aus Intervallen besteht. Auch hier erhält man ein Verzweigungsresultat, allerdings kann die Existenz von Lösungszweigen nicht nachgewiesen werden.

In Anhang A wird eine alternative Methode zur Herleitung der NLS in Kapitel 3 vorgestellt; es handelt sich hierbei um einen „multiple scale“-Ansatz.

In Anhang B befinden sich einige umfangreiche Rechnungen, die bei der Herleitung der HNLS in Kapitel 3 benötigt werden.

Mein Dank gilt Prof. Dr. Tassilo Küpper, Dr. Markus Kunze und Dr. Sergei Turitsyn für die Betreuung und Unterstützung bei dieser Arbeit.

1. Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Einführung in die Faseroptik zu geben. Dazu werden in Abschnitt 1.1 zunächst einige grundlegende Begriffe geklärt und das Prinzip der Signalübertragung dargestellt.
Bekanntermaßen läßt sich Licht als elektromagnetische Welle auffassen; die Grundlagen der theoretischen Optik werden in den Maxwellschen Gleichungen beschrieben. Diese werden in Abschnitt 1.2 eingeführt; sie sind Ausgangspunkt jeder mathematischen Betrachtung im Bereich der Optik. Aus ihnen wird dann eine einzelne, nichtlineare Gleichung für die elektrische Feldstärke hergeleitet, die Basis für das weitere Vorgehen dieser Arbeit ist.
Um erste Einblicke in die Problematik zu erhalten sowie einige wichtige Eigenschaften herzuleiten, wird in Abschnitt 1.3 der lineare Anteil der in Abschnitt 1.2 gewonnenen Gleichung untersucht.

1.1. Optische Übertragungssysteme

Seit jeher ist der Mensch daran interessiert, Informationen zu übermitteln. Im Laufe der Zeit veränderten sich die Übertragungssysteme von den frühzeitlichen Rauchzeichen über die Telegraphen bis hin zu Kupferleitungen, mit denen die ersten Telefongespräche übertragen wurden. Durch die starke Nutzung der Telekommunikation, insbesondere des Internets, sind die Ansprüche an die Übertragungsraten in der heutigen Zeit stark gestiegen.
Für das heute am weitesten verbreitete Übertragungsmedium gibt es eine Vielzahl von Bezeichnungen: Glasfaser, Glasfaserkabel, Lichtleiter, Lichtleitfaser, Lichtwellenleiter. In der englischsprachigen Literatur wird es als „Optical Fiber“ bezeichnet. In dieser Arbeit wird der Begriff Glasfaser oder einfach Faser verwendet.
Es hat sich gezeigt, daß für die Signalübertragung kein Medium besser geeignet ist als die Glasfaser. Der größte Vorteil gegenüber einem Kupferkabel liegt darin, daß eine wesentlich kleinere Abschwächung des Signals über große Entfernungen entsteht. Daher können Glasfasern Daten über größere Entfernungen übertragen. So lassen sich Distanzen von mehreren 100 km problemlos überbrücken, ein Kupferkabel läßt nur 1 bis 2 km zu. Desweiteren liegen die mit Glasfasern realisierbaren Übertragungsraten um ein Vielfaches höher als bei Kupferleitungen. Aus diesen Gründen ist die Glasfaser das optimale Medium für schnellsten Transport riesiger digitaler Datenmengen, wie sie zum Beispiel bei den komplexen Forschungsarbeiten in den modernen Wissenschaften anfallen.

Das Prinzip der Signalübertragung läßt sich leicht verstehen:

Zunächst wird das elektrische Eingangssignal durch einen Übermittler, zumeist sind dies infrarotstrahlende Dioden (z.B. LED), in ein optisches Signal verwandelt und in den Lichtwellenleiter, also in die Faser, eingebracht. Auf Empfängerseite wird dieses optische Signal durch eine Photodiode in ein elektrisches Signal zurückverwandelt.

Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung der Signalübertragung

Im folgenden werden die drei Grundkomponenten eines optischen Übertragungssystem genauer beschrieben:

- Zunächst beginnen wir mit den Aufgaben des Übermittlers:

  Der Übermittler wandelt das Eingangssignal in ein optisches, digitalisiertes Signal um, so wird beispielsweise Sprache in eine Folge umgewandelt, die nur aus 0 und 1 besteht. Das Ausgangssignal des Übermittlers besteht also aus einer Folge kurzer Impulse. Man unterscheidet zwischen zwei Übertragungsformaten: Im sogenannten „return-to-zero“ Format (RZ) wird eine 1 durch einen Impuls dargestellt, danach kehrt das Signal wieder zur 0 zurück. Dies geschieht unabhängig von der nächsten Zahl des Codes. Die Situation kann man sich wie folgt vorstellen:

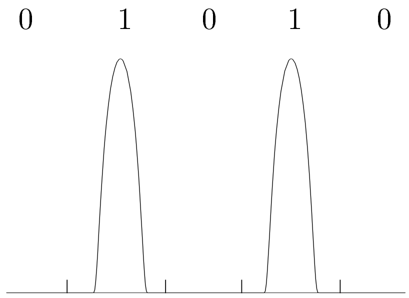


Abbildung 1.2.: Datenübertragung in einer Faser

Im Gegensatz dazu kehrt das Signal im „nonreturn-to-zero“ Format (NRZ) nur dann zur 0 zurück, wenn die nächste Zahl des Codes auch eine 0 ist. In dieser Arbeit werden wir uns nur mit dem RZ-Format beschäftigen, da dieses Übertragungssysteme unterstützt, die auf Solitonen basieren. Zudem lassen sich mit diesem Format höhere Übertragungsraten erreichen, so daß es für die Anwendungen in der Praxis interessanter ist.

- Wir wollen uns nun dem Aufbau einer Glasfaser zuwenden:

  Die Glasfaser besteht aus einer dünnen, zylindrischen Faser aus Quarzglas (SiO_2), dem sogenannten Kern, und dem um den Kern liegenden Mantel, der ebenfalls aus Quarzglas besteht. Üblicherweise wird die Glasfaser durch eine Plastikhülle geschützt, in die der Mantel eingebettet wird. Der Aufbau einer Faser wird in folgendem Diagramm verdeutlicht:

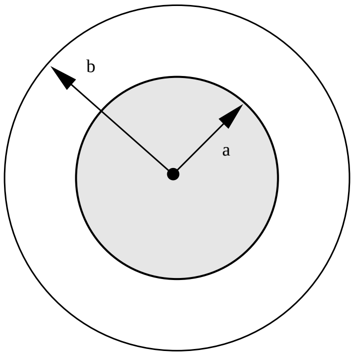


Abbildung 1.3.: Querschnitt einer Faser

  Hierbei stellt der Bereich $r \leq a$ den Kern dar, dieser hat typischerweise einen Durchmesser von 3 bis 50 μm. Der Durchmesser des Mantels ($a < r \leq b$) beträgt ungefähr 150 bis 200 μm; die Schutzbeschichtung wurde in dem Diagramm vernachlässigt, da der Lichtstrahl im Inneren der Faser bleiben soll und die Hülle daher für unsere Zwecke unerheblich ist. Um dies zu erreichen, ist darauf zu achten, daß der Brechungsindex im Mantel kleiner ist als der im Kern (vgl. Abschnitt 1.3). Man unterscheidet zwischen Stufenprofil- und Gradientenprofilfaser, je nachdem, ob die Änderung des Brechungsindex zwischen Kern und Mantel sprunghaft oder allmählich erfolgt (vgl. [2]).

- Zuletzt wird nun die Aufgabe eines optischen Empfängers beschrieben:

  Die Aufgabe des Empfängers ist es, aus dem optischen Signal die ursprünglichen Daten herauszulesen und zu reproduzieren. Demnach wandelt ein Empfänger optische Signale in elektrische Ströme und Spannungen um. Sein genauer Aufbau ist abhängig von dem jeweils benutzten Format (RZ oder NRZ). Der Empfänger besteht mindestens aus einer Photodiode, die das Umwandeln des optischen Signals übernimmt, und einem Verstärker. Der Einsatz dieses Verstärkers ist notwendig, um das Signal genauer zu reproduzieren, da dieses in der Faser dem Verlust unterworfen war.

1.2. Maxwellsche Gleichungen

In diesem Abschnitt beginnen wir mit der mathematischen Beschreibung der Lichtwellenausbreitung in Glasfasern. Wie alle elektromagnetischen Phänomene wird Wellenausbreitung in Fasern durch die Maxwellschen Gleichungen beschrieben. In einem Medium ohne äußere Ströme und Ladungen haben sie die Form:

$$\nabla \cdot D = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot H = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{1.4}$$

wobei

$$E = E(x, y, z, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

$$H = H(x, y, z, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 \tag{1.6}$$

das elektrische bzw. magnetische Feld sind.
Das Koordinatensystem sei dabei so gelegt, daß die z-Achse der Längsachse der Faser entspricht; x und y beschreiben dann den Querschnitt der Faser. In den Maxwellschen Gleichungen sei $(\nabla \cdot)$ die Divergenz und $(\nabla \times)$ die Rotation. Die Abhängigkeit der einzelnen Felder von den Orts- und Zeitvariablen wurde dabei in den Gleichungen unterdrückt. D und B sind elektrisches bzw. magnetisches Ersatzfeld und wie folgt definiert:

$$B = \mu H \tag{1.7}$$

$$D = \epsilon_0 E + P(E) \tag{1.8}$$

Dabei sind μ und ϵ_0 Konstanten und P ist die Polarisation. Für sie gilt

$$P(E) = P_L(E) + P_{NL}(E), \tag{1.9}$$

wobei

$$(P_L(E))(x, y, z, t) := \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(r, t - t_1) E(x, y, z, t_1)\, dt_1 \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}(P_{NL}(E))(x, y, z, t) := \epsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} & \chi^{(3)}(r, t - t_1, t - t_2, t - t_3)(E(x, y, z, t_1) \cdot E(x, y, z, t_2)) \\ & E(x, y, z, t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3\end{aligned} \tag{1.11}$$

und $(E(t_1) \cdot E(t_2))$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist. Die Funktion $\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(3)}$ wird dabei Suszeptibilität genannt. Wir haben hier angenommen, daß sie nur vom Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt, dies ist aufgrund der zylindrischen Gestalt der Faser sinnvoll.

Bemerkung 1.2.1. *Im allgemeinsten Fall schreibt sich die j-te $(1 \leq j \leq 3)$ Komponente des Polarisationsfelds als*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0} P_j = &\sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jk}^{(1)}(x,y,t-t_1) E_k(t_1)\, dt_1 \\
&+ \sum_{k,l=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jkl}^{(1)}(x,y,t-t_1,t-t_2) E_k(t_1) E_l(t_2)\, dt_1\, dt_2 \\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jklm}^{(1)}(x,y,t-t_1,t-t_2,t-t_3) E_k(t_1) E_l(t_2) E_m(t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3.
\end{aligned}
$$

Für eine Glasfaser läßt sich jedoch mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen der Ansatz (1.10) *rechtfertigen (vgl. Abschnitt 2d. in [6]).*

Da die Polarisation nur vom Feld $E(t_1)$ in der Vergangenheit abhängen kann, ist die sogenannte Kausalitätsbedingung

$$\chi^{(1)}(r, t-t_1) = 0 \text{ für } t - t_1 < 0, \tag{1.12}$$

sowie eine analoge Aussage für $\chi^{(3)}$ erfüllt. Weiter gilt für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c := \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon_0}}$. Man kann nun eine einzelne Gleichung für die Ausbreitung des elektrischen Feldes E herleiten. Durch Anwendung der Rotation $(\nabla\times)$ auf (1.3) erhält man unter Verwendung der Maxwellschen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times E) &= \nabla \times (-\frac{\partial B}{\partial t}) && \text{nach (1.3)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) \\
&= -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H) && \text{nach (1.7)} \\
&= -\mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} && \text{nach (1.4)} \\
&= -\mu\epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 P(E)}{\partial t^2} && \text{nach (1.8).}
\end{aligned}
$$

Mit den Beziehungen $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \triangle E$, sowie $\mu\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ und $\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ ergibt sich dann die folgende wichtige Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\triangle E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot E) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P(E)}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

Ausgehend von dieser Gleichung wird später die NLS hergeleitet.

1.3. Lineares Problem

In diesem Abschnitt wird das zu (1.13) gehörige lineare Problem betrachtet. Dies geschieht einerseits, um einen ersten Einblick in die Art der Lösungen zu erhalten, andererseits, um die Einmodenfaserannahme des nächsten Abschnitts zu erläutern.

Unter Vernachlässigung der Nichtlinearität ($P_{NL} = 0$) schreibt sich die Wellengleichung (1.13) als

$$\triangle E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E + \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(r, t-t_1)E\,dt_1\right) - \nabla(\nabla \cdot E) = 0 \tag{1.14}$$

Anwendung der Fouriertransformation nach der Zeit

$$\hat{E}(x,y,z,\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} E(x,y,z,t)e^{i\omega t}\,dt$$

liefert unter Benutzung der Formel für die Fouriertransformation einer Faltung

$$\triangle \hat{E}(x,y,z,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}(\hat{E}(x,y,z,\omega) + \hat{\chi}^{(1)}(r,\omega)\hat{E}(x,y,z,\omega)) - \nabla(\nabla \cdot \hat{E})(x,y,z,\omega)) = 0 \tag{1.15}$$

Definition 1.3.1. *Die Funktion $n(r,\omega) := \sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(r,\omega)}$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ heißt Brechungsindex der Faser. Im allgemeinen ist n komplexwertig.*

Wir wollen von nun an annehmen, daß n reellwertig bzw. $\hat{\chi}^{(1)}$ positiv ist. Dies entspricht der Tatsache, daß die Faser verlustfrei ist (vgl. Abschnitt 2.3).
Gesucht sind jetzt beschränkte Lösungen von (1.15), die für $r \to \infty$ verschwinden. Daher wird $\hat{E}$ in Form einer Welle mit Wellenzahl k angenommen:

$$\hat{E}(x,y,z,\omega) = e^{ikz}U(x,y,\omega). \tag{1.16}$$

Mit dieser Annahme und Definition 1.3.1 wird das lineare Problem (1.15) zu

$$\triangle_\perp U - k^2 U + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}U - \nabla(\nabla \cdot U)\mid_{\frac{\partial}{\partial z}=ik} = 0, \tag{1.17}$$

wobei

$$\nabla(\nabla \cdot U)\mid_{\frac{\partial}{\partial z}=ik} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -ik\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -ik\frac{\partial}{\partial y} \\ -ik\frac{\partial}{\partial x} & -ik\frac{\partial}{\partial y} & -k^2 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

und die Notation $\triangle_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ verwendet wurde. Es sei daran erinnert, daß n abhängig von r ist. In Operatorschreibweise lautet (1.15) dann

$$L(k,\omega)U(x,y,\omega) = 0, \tag{1.19}$$

wobei der Differentialoperator L definiert sei als

$$L(k,\omega) := \triangle_\perp - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} - \nabla(\nabla\cdot)\,|_{\frac{\partial}{\partial z}=ik} \tag{1.20}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -ik\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} & -ik\frac{\partial}{\partial y} \\ -ik\frac{\partial}{\partial x} & -ik\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Lösungen der Gleichung (1.19) werden Moden genannt. Bei der Herleitung der NLS wird uns diese Gleichung wieder begegnen, dabei werden wir Aussagen über die Lösungen benötigen. Daher soll die Lösbarkeit im folgenden näher beleuchtet werden, gesucht wird also ein Paar $(k(\omega), U(x,y,\omega))$, so daß (1.19) für festes ω erfüllt ist. Eine Gleichung dieser Art wird Dispersionsbeziehung genannt, da man hieraus die Beziehung zwischen der Wellenzahl k und der Frequenz ω bestimmen kann. Man erkennt, daß mit $(k(\omega), U(x,y,\omega))$ auch $(-k(\omega), \bar{U}(x,y,\omega))$ Lösung ist. Daher wollen wir von nun an ohne Einschränkung $k > 0$ annehmen.

Um das Problem zu vereinfachen, betrachten wir den Fall, daß die Faser ein Stufenprofil besitzt, das bedeutet

$$n(r,\omega) = \begin{cases} n_1(\omega) & \text{für } r \le a \\ n_2(\omega) & \text{für } a < r \le b. \end{cases} \tag{1.22}$$

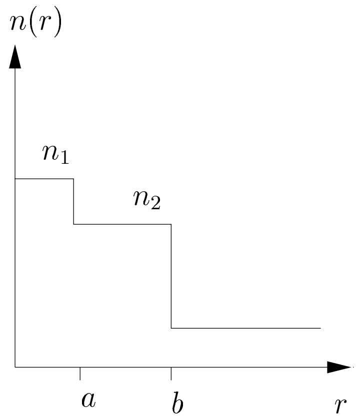


Abbildung 1.4.: Der Brechungsindex im Fall eines Stufenprofils

Bemerkung 1.3.2. *Wir nehmen an, daß der Mantel derart breit ist, daß das elektrische Feld ihn nicht verläßt. Im folgenden wird daher $b = \infty$ gesetzt.*

In einer Faser mit Stufenprofil gilt aufgrund der Maxwellschen Gleichung (1.1)

$$0 = \nabla \cdot \hat{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot (\hat{E} + \hat{\chi}^{(1)} \hat{E}) = \epsilon_0 \nabla \cdot (n^2 \hat{E}) = \epsilon_0 n^2 \; \nabla \cdot \hat{E} \Rightarrow \nabla \cdot \hat{E} = 0. \tag{1.23}$$

$\hat{E}$ ist also in diesem Fall divergenzfrei, somit folgt aus (1.15)

$$\triangle_\perp U(x,y) - k^2 U(x,y) + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} U(x,y) = 0. \tag{1.24}$$

Aufgrund der zylindrischen Gestalt der Faser erscheint es sinnvoll, in Zylinderkoordinaten zu wechseln:

$$U(x,y,\omega) = \begin{pmatrix} U_r(r,\phi,\omega) \\ U_\phi(r,\phi,\omega) \\ U_z(r,\phi,\omega) \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Für die Fouriertransformierte des magnetischen Feld gelte analog

$$\hat{H}(x,y,z,\omega) = e^{ikz} V(r,\phi,\omega). \tag{1.26}$$

Die Abhängigkeit der einzelnen Funktionen von ω wird im folgenden unterdrückt, da wir nur Lösungen einer bestimmten, festen Frequenz suchen wollen.

Aus den Maxwellschen Gleichungen in Zylinderkoordinaten läßt sich nun folgern, daß die anderen Komponenten bereits durch U_z und V_z bestimmt werden können. Dies soll jetzt erläutert werden:
Für die Rotation gilt in Zylinderkoordinaten

$$(\nabla \times E)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} \\ -\frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r(r,\phi,z) \\ E_\phi(r,\phi,z) \\ E_z(r,\phi,z) \end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Damit lassen sich aus den Maxwellschen Gleichungen (1.1) und (1.2) die Beziehungen

$$\begin{aligned} i\omega\epsilon U_r &= -ikV_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} V_z \\ i\omega\epsilon U_\phi &= ikV_r - \frac{\partial}{\partial r} V_\phi \\ i\omega\epsilon U_z &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\phi) \end{aligned} \tag{1.28}$$

und

$$\begin{aligned} -i\omega\mu V_r &= -ikU_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} U_z \\ -i\omega\mu V_\phi &= ikU_r - \frac{\partial}{\partial r} U_\phi \\ -i\omega\mu V_z &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} U_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_\phi) \end{aligned} \tag{1.29}$$

herleiten. Hierbei wurde $\epsilon := \epsilon_0(1+\hat{\chi}_1) = \epsilon_0 n^2$ gesetzt. Mit diesen Gleichungen gilt dann

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} U_z - \frac{\omega\mu}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} V_z\right) \\ U_\phi &= \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} U_z + \frac{\omega\mu}{k}\frac{\partial}{\partial r} V_z\right) \\ V_r &= \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} V_z + \frac{\omega\epsilon}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} U_z\right) \\ V_\phi &= \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} V_z - \frac{\omega\mu}{k}\frac{\partial}{\partial r} U_z\right) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Aufgrund von (1.30) genügt es also, U_z und V_z zu bestimmen.

Wir schreiben nun den zweidimensionalen Laplaceoperator in Polarkoordinaten und erhalten für die Komponente U_z des elektrischen Feldes aus (1.15) die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}\right) U_z = 0. \tag{1.31}$$

Analog lassen sich diese Betrachtungen auch für V_z durchführen. Nun wird die Lösbarkeit von (1.31) untersucht. Dabei wird der Darstellung aus Kapitel 3 des Buches von Yariv [4] gefolgt; die wichtigen Schritte findet man auch in Abschnitt 2.2 in [3].

Wir wählen nun den folgenden Separationsansatz:

$$U_z(r,\phi) = \psi(r) e^{il\phi} \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0. \tag{1.32}$$

Dabei ist $l \in \mathbb{N}_0$, da das Feld 2π-periodisch in ϕ sein muß. Mit Hilfe von (1.32) erhält man aus (1.31)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} - k^2 - \frac{l^2}{r^2}\right)\psi = 0. \tag{1.33}$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung, wobei n stückweise konstant in r ist. Die allgemeine Lösung schreibt sich wie folgt

$$\psi(r) = C_1 J_l(hr) + C_2 Y_l(hr) \text{ mit } h^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{1.34}$$

$$\text{bzw.} \qquad \psi(r) = C_1 I_l(qr) + C_2 K_l(qr) \text{ mit } q^2 = k^2 - n^2\frac{\omega^2}{c^2}, \tag{1.35}$$

jeweils abhängig vom Vorzeichen von $n^2\omega^2/c^2 - k^2$. Die Funktionen I_l, J_l, K_l und Y_l sind die Besselfunktionen erster und zweiter Art [5], sie werden in folgendem Diagramm dargestellt:

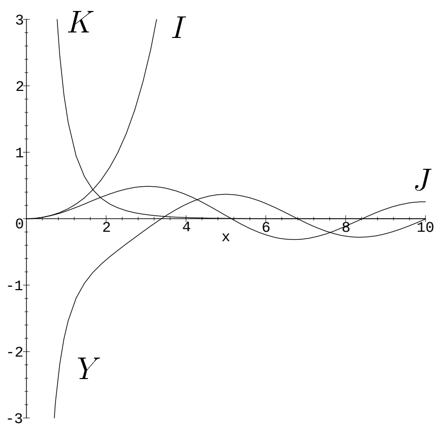


Abbildung 1.5.: Die Besselfunktionen erster und zweiter Art für $l = 2$

Aufgrund der Beobachtungen aus der Praxis werden wir nun die Gestalt der Mode vorschreiben:

Im Inneren der Faser ($r \leq a$) soll die Lösung sinusförmig sein und für $r \to \infty$ exponentiell verschwinden. Um diese Forderung zu erfüllen, muß ψ folgende Gestalt haben:

$$\psi(r) = \begin{cases} AJ_l(hr) & \text{für } r \leq a, \text{ wobei } h = \sqrt{n_1^2\omega^2/c^2 - k^2} \\ BK_l(qr) & \text{für } r > a, \text{ wobei } q = \sqrt{n_2^2\omega^2/c^2 - k^2}. \end{cases} \tag{1.36}$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz dieser Lösung ist demnach

$$n_2^2\frac{\omega^2}{c^2} < k^2 < n_1^2\frac{\omega^2}{c^2}, \tag{1.37}$$

insbesondere also $n_1 > n_2$.

Bemerkung 1.3.3. *Hieran erkennt man die wichtige Tatsache, daß der Brechungsindex im Kern größer als der im Mantel sein muß.*

Für das elektrische Feld gilt dann

$$\hat{E}_z(r,\phi,z) = e^{ikz}U(r,\phi) = e^{i(kz+l\phi)}\psi(r) = \begin{cases} AJ_l(hr)e^{i(kz+l\phi)} & \text{für } r \leq a \\ BK_l(qr)e^{i(kz+l\phi)} & \text{für } r > a. \end{cases} \tag{1.38}$$

Analog erhalten wir für das magnetische Feld

$$\hat{H}_z(r,\phi,z) = e^{ikz}V(r,\phi) = \begin{cases} CJ_l(hr)e^{i(kz+l\phi)} & \text{für } r \leq a \\ DK_l(qr)e^{i(kz+l\phi)} & \text{für } r > a. \end{cases} \tag{1.39}$$

Die anderen Komponenten lassen sich dann mit Hilfe von (1.30) errechnen.

Wir werden nun Stetigkeit der Komponenten in $r = a$ verlangen. Dies führt auf folgendes Gleichungssystem für die Konstanten A, B, C und D:

$$\begin{pmatrix} J_l(ha) & 0 & K_l(qa) & 0 \\ \frac{il}{h^2a}J_l(ha) & -\frac{\omega\mu}{hk}J_l'(ha) & \frac{il}{q^2a}K_l(qa) & -\frac{\omega\mu}{qk}K_l'(qa) \\ 0 & J_l(ha) & 0 & K_l(qa) \\ \frac{\omega\epsilon_1}{hk}J_l'(ha) & \frac{il}{h^2a}J_l(ha) & \frac{\omega\epsilon_2}{qk}K_l'(qa) & \frac{il}{q^2a}K_l(qa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \tag{1.40}$$

Hierbei wurde $\epsilon_1 := \epsilon_0 n_1^2$, sowie $\epsilon_2 := \epsilon_0 n_2^2$ gesetzt. Dieses System hat eine nichttriviale Lösung genau dann, wenn die Determinante verschwindet. Dies ist gleichbedeutend damit, daß

$$\left(\frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)} + \frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right)\left(\frac{n_1^2J_l'(ha)}{haJ_l(ha)} + \frac{n_2^2K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right) = l^2\left[\left(\frac{1}{qa}\right)^2 + \left(\frac{1}{ha}\right)^2\right]\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2$$

erfüllt ist. Hierbei handelt es sich um eine quadratische Gleichung für $J_l'(ha)/haJ_l(ha)$, man gelangt zu:

$$\begin{aligned} \frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)} = &-\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)} \\ &\pm\left[\left(\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\right)^2\left(\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right)^2 + \frac{l^2}{n_1^2}\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Die Aufgabe besteht jetzt darin, in einer vorgegebenen Faser nach Lösungen fester Frequenz ω zu suchen. Die Faserparameter $n_1(\omega), n_2(\omega)$ und der Kernradius a seien also fest vorgegeben. Desweiteren benutzen wir auf der rechten Seite von (1.41) $(qa)^2 = (n_1^2 - n_2^2)\frac{\omega^2}{c^2}a^2 - (ha)^2$, und (1.41) wird zu einer Gleichung für ha. Zu bestimmen sind also für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ der oder die Werte von ha, für die (1.41) erfüllt ist. Ist so ein $ha = \sqrt{n_1^2\omega^2/c^2 - k^2}a$ gefunden, so ist die Wellenzahl k den Faserparametern entsprechend anzupassen. Daraus erhalten wir A, B, C und D als nichttriviale Lösung des Gleichungssystems (1.40) und mit Hilfe von (1.38) und (1.39) die gesuchten Moden.

Wir benutzen nun folgende Beziehungen für die Ableitungen der Besselfunktionen:

$$J_l'(x) = J_{l+1}(x) + \frac{l}{x}J_l(x) = J_{l-1}(x) - \frac{l}{x}J_l(x) \tag{1.42}$$

$$K_l'(x) = K_{l+1}(x) + \frac{l}{x}K_l(x) = K_{l-1}(x) - \frac{l}{x}K_l(x). \tag{1.43}$$

Damit gilt:

$$\frac{J_{l+1}(ha)}{haJ_l(ha)} = \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)} + \left(\frac{l}{(ha)^2} - R\right) \qquad (EH\text{-Moden}) \tag{1.44}$$

$$\frac{J_{l-1}(ha)}{haJ_l(ha)} = -\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)} + \left(\frac{l}{(ha)^2} - R\right) \qquad (HE\text{-Moden}), \tag{1.45}$$

wobei

$$R = \left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right)^2 \left(\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right)^2 + \frac{l^2}{n_1^2}\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{1.46}$$

Die Bezeichnung EH- (bzw. HE-) Moden erklärt sich dadurch, daß im ersten Fall das elektrische und im zweiten Fall das magnetische Feld dominiert.

Im folgenden werden (1.44) und (1.45) graphisch gelöst. Auf der rechten Seite der Gleichungen benutzen wir $(qa)^2 = (n_1^2 - n_2^2)\frac{\omega^2}{c^2}a^2 - (ha)^2$ und fassen beide Seiten als Funktionen von ha auf. Dabei bemerken wir, daß die rechte Seite von (1.44) bzw. (1.45) für $qa \to 0$ bzw. $ha \to V := \sqrt{n_1^2 - n_2^2\frac{\omega^2}{c^2}a^2}$ divergiert. Nachdem beide Seiten in ein Koordinatensystem eingetragen sind, läßt sich aus den Schnittpunkten der entsprechende Wert von ha bestimmen. Durch Lösen des Gleichungssytems (1.40) erhält man dann die gesuchten Moden. Für jedes l kann es natürlich mehrere Lösungen geben, die zugehörigen Moden werden durchnumeriert und mit HE_{lm} bzw. EH_{lm} ($m = 1, 2, \dots$) bezeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall $l = 0$. Die Felder sind hier unabhängig vom Winkel ϕ, also radialsymmetrisch. Für $l = 0$ lauten die zu lösenden Gleichungen unter Benutzung von $J_1 = -J_{-1}$ und $K_0' = -K_1$:

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{K_1'(qa)}{qaK_0(qa)} \qquad (TE) \tag{1.47}$$

und

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{n_2^2K_1'(qa)}{qan_1^2K_0(qa)} \qquad (TM). \tag{1.48}$$

Für $l = 0$ schreiben wir TE (bzw. TM) statt HE (bzw. EH), da sich mit Hilfe von (1.40) zeigen läßt, daß das elektrische (bzw.magnetische) Feld transversal ist. Nun betrachten wir die graphische Lösung von (1.47)

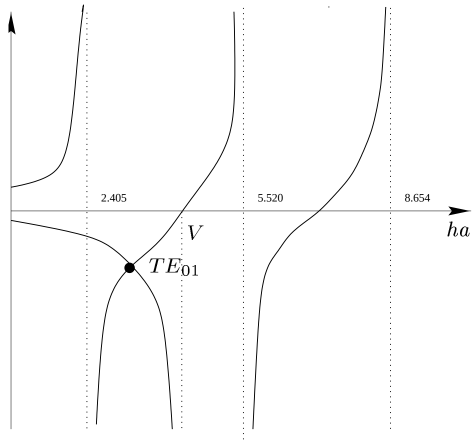


Abbildung 1.6.: Graphische Bestimmung der TE-Moden ($l = 0$)

Die vertikalen Asymptoten werden bestimmt durch die Lösungen von $J_0(ha) = 0$ sowie den Wert von V. Die ersten Nullstellen von J_0 sind in der Abbildung eingetragen, dort divergiert die linke Seite von (1.47). Wie bereits erwähnt, divergiert die rechte Seite von (1.47) für $ha \to V$. Falls nun V kleiner als die erste Nullstelle von J_0 ist, also für $V < 2,405$, existiert kein Schnittpunkt und demzufolge auch keine TE-Mode. Liegt V zwischen der ersten und zweiten Nullstelle, so existiert genau eine Lösung TE_{01}. Für $V > 5.52$ existieren zwei Moden: TE_{01} und TE_{02}. Daran erkennt man, daß der Parameter V die Anzahl der Moden bestimmt, die von der Faser unterstützt werden. In dem Moment, wo V kleiner wird als eine Nullstelle von J_0, verschwindet eine Mode. Aus diesem Grund wird V auch Abschneidewert genannt.

Wir wollen uns nun nicht den TM-Moden zuwenden, da dieser Fall qualitativ das gleiche Ergebnis wie bei den TE-Moden liefert. Stattdessen untersuchen wir nun den Fall $l = 1$. Dabei ergibt sich folgende Situation für die EH-Moden:

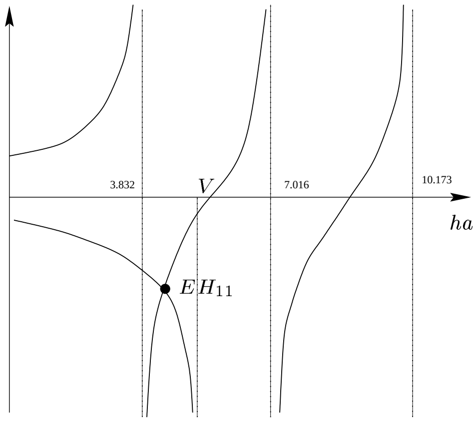


Abbildung 1.7.: Graphische Bestimmung der EH-Moden für $l = 1$

Die vertikalen Asymptoten werden hier durch die Nullstellen von J_1 bestimmt. Wir erkennen, daß für $V < 3,832$ keine EH -Moden existieren können. Nun betrachten wir die HE-Moden für $l = 1$:

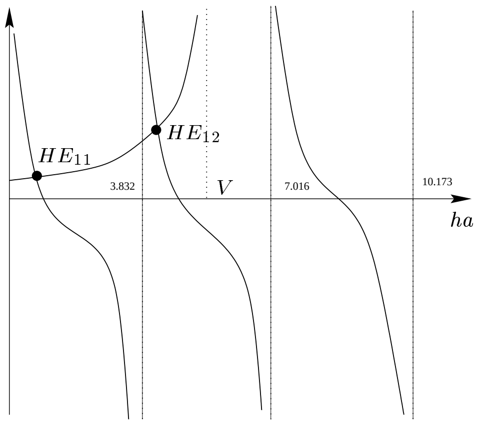


Abbildung 1.8.: Graphische Bestimmung der HE-Moden für $l = 1$

Hier erkennen wir folgende Besonderheit: Die HE_{11}-Mode existiert für jeden Wert von V. Für $l = 2$ bemerken wir, daß sich die Monotonie der rechten Seite von (1.45) aufgrund des unterschiedlichen asymptotischen Verhaltens von K_l für $l = 0$ und $l = 1, 2, \ldots$ verändert. Es ergibt sich folgende Situation für die HE-Moden mit $l = 2$:

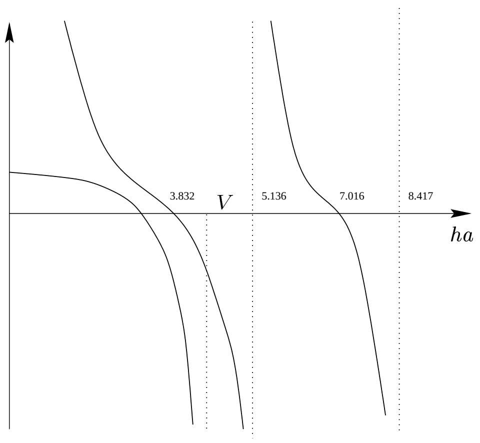


Abbildung 1.9.: Graphische Bestimmung der HE-Moden für $l = 2$

An dieser Abbildung erkennt man, daß für hinreichend kleine Werte von V keine Schnittpunkte mehr existieren, demzufolge wird in solchen Fasern für kleine V keine HE_{2k}-Mode unterstützt.

Man kann durch asymptotische Betrachtungen zeigen, daß die HE_{11}-Mode die einzige ist, die für jeden Wert von V existiert. Daher wird sie auch Fundamentalmode genannt.

Bemerkung 1.3.4. *Im Fall einer Gradientenprofilfaser, in der sich der Brechungsindex zwischen Kern und Mantel allmählich ändert, gelten ähnliche Überlegungen (vgl. Abschnitt 3.4 in [4]).*

Zusammenfassung:

In diesem Abschnitt haben wir die Wellengleichung (1.13) im Falle linearer Polarisation untersucht. Mit Hilfe der Fouriertransformation wurde diese in die Eigenwertgleichung $L(k,\omega)U(x,y) = 0$ mit einem linearen Differentialoperator L überführt. Wir haben gesehen, daß für eine feste Frequenz ω mehrere Eigenwerte $k = k(\omega)$ existieren können; die zugehörigen Eigenfunktionen $U(x,y,\omega)$ heißen Moden. Die Anzahl der Moden, die von einer Faser unterstützt werden, bestimmt der Parameter $V := \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} a^2}$. Durch geeignete Wahl des Kernradius a sowie des Brechungsindex n kann man also bestimmen, welche Moden unterstützt werden sollen. Wählt man $V < 2,405$, so wird nur eine Mode unterstützt. Die Faser wird dann Einmodenfaser genannt.

2. Annahmen

In diesem Abschnitt werden die Annahmen an die Faser sowie an das elektrische Feld, unter denen die NLS hergeleitet wird, näher erläutert. Wir wollen folgendes annehmen:

- Die Faser ist verlustfrei.
- Die Faser ist eine Einmodenfaser.
- Das elektrische Feld hat die Gestalt einer quasimonochromatischen Welle.

2.1. Verlustfreie Faser

Der Ausdruck Verlust bezeichnet den Energieverlust des Lichtstrahls, der beim Durchlaufen der Faser in Form von Streuung und Absorption auftritt; er ist abhängig von der verwendeten Wellenlänge. Günstige Wellenlängen für Quarzglas liegen bei 850 nm, 1.300 nm und 1.550 nm. Selbstverständlich existieren in der Realität keine verlustfreien Fasern. Daher werden wir die NLS im nächsten Kapitel unter dieser idealisierten Annahme herleiten, den Verlust jedoch in Kapitel 5 in die Gleichung einbeziehen.

Der Verlust in einer Faser für eine Welle der Frequenz ω_1 ist definiert als

$$\gamma := \omega_1 \frac{\mathrm{Im}(n(\omega_1))}{c}.$$

Bemerkung 2.1.1. *In der englischsprachigen Literatur wird dieser Effekt mit „loss“ bezeichnet. Häufig findet man in der deutschsprachigen Literatur auch den Ausdruck „Dämpfung“, in dieser Arbeit wollen wir aber bei der Bezeichnung Verlust bleiben.*

Die Annahme, daß die Faser verlustfrei ist ($\gamma = 0$), bedeutet also

$$n(\omega) \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

In Abschnitt 1.3 haben wir angenommen, daß die Polarisation linear ist. Im allgemeinen enthält der Brechungsindex jedoch aufgrund der nichtlinearen Polarisation einen intensitätsabhängigen Teil:

$$n(\omega) \sim n_1(\omega) + n_2(\omega)|E|^2. \tag{2.2}$$

Dabei stammt n_2 von der nichtlinearen Suszeptibiltät $\chi^{(3)}$. Aufgrund der Definition des Brechungsindex ist die Annahme, daß die Faser verlustfrei ist, gleichbedeutend damit, daß $\hat{\chi}^{(1)}$ sowie $\hat{\chi}^{(3)}$ für alle Werte von ω reell und positiv sind.

Diese Annahme wird bei der Herleitung der NLS benötigt, damit der Operator L in dem Raum der Funktionen, die für $x_\perp \to \infty$ verschwinden, selbstadjungiert ist.
Um dies zu sehen, definieren wir

$$X := L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2). \tag{2.3}$$

Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\Big\langle U, V \Big\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{U}_1 V_1 + \overline{U}_2 V_2 + \overline{U}_3 V_3 \, dx \, dy \tag{2.4}$$

wird X zu einem Hilbertraum. Es gilt:

$$L(k,\omega)U(x_\perp) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -ik\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} & -ik\frac{\partial}{\partial y} \\ -ik\frac{\partial}{\partial x} & -ik\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2} \end{pmatrix} U(x_\perp). \tag{2.5}$$

Wir bemerken, daß diese Matrix symmetrisch ist. Seien jetzt $U, V \in H^2(\mathbb{R}^2) \times H^2(\mathbb{R}^2) \times H^2(\mathbb{R}^2)$ mit $U = (U_1, U_2, U_3), V = (V_1, V_2, V_3)$. Dabei ist $H^2(\mathbb{R}^2)$ der Sobolevraum $W^{2,2}(\mathbb{R}^2)$. Dann sind die folgenden Umformungen gerechtferigt, es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\langle U, L(k,\omega)V \Big\rangle \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}_1(x,y) \left[(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) V_1(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V_2(x,y) - ik\frac{\partial}{\partial x} V_3(x,y) \right] dxdy \\
+&\int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}_2(x,y) \left[-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V_1(x,y) + (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) V_2(x,y) - ik\frac{\partial}{\partial y} V_3(x,y) \right] dxdy \\
+&\int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}_3(x,y) \left[-ik\frac{\partial}{\partial x} V_1(x,y) - ik\frac{\partial}{\partial y} V_2(x,y) + (\triangle_\perp + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) V_3(x,y) \right] dxdy.
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration und Umsortieren gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle U, L(k,\omega)V \Big\rangle \\
=&\int_{\mathbb{R}^2} \left[(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) \bar{U}_1(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{U}_2(x,y) + ik\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}_3(x,y) \right] V_1(x,y) dxdy \\
+&\int_{\mathbb{R}^2} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{U}_1(x,y) + (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) \bar{U}_2(x,y) + ik\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}_3(x,y) \right] V_2(x,y) dxdy \\
+&\int_{\mathbb{R}^2} \left[ik\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}_1(x,y) + ik\frac{\partial}{\partial y} \bar{U}_2(x,y) + (\triangle_\perp + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}) \bar{U}_3(x,y) \right] V_3(x,y) dxdy \\
=&\Big\langle L(k,\omega)U, V \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei aufgrund der Tatsache, daß $n(\omega) \in \mathbb{R}$ ist. Demzufolge ist L also formal selbstadjungiert, im nächsten Kapitel werden wir auf L die Fredholmsche Alternative anwenden.

2.2. Einmodenfaser

Wie im letzten Kapitel gesehen, hängt die Anzahl der Moden, die in einer Faser existieren, vom Parameter $V := \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} a^2}$ ab. Wenn nun $n_1^2 - n_2^2$ bzw. der Kerndurchmesser a genügend klein ist, wird nur eine Mode, die Fundamentalmode HE_{11}, unterstützt. In diesem Fall wird die Faser Einmodenfaser genannt, häufig findet man auch die Bezeichnung Monomodenfaser. Einmodenfasern haben typischerweise ein Stufenindex-Profil und einen sehr kleinen Kerndurchmesser von ungefähr 10μm. Da in ihnen der Verlust vergleichsweise niedrig ist, werden sie in der Praxis häufig eingesetzt.

Mathematisch läßt sich eine Einmodenfaser wie folgt charakterisieren:

Zu einer Frequenz ω gibt es genau einen zugehörigen Eigenwert $k(\omega) > 0$ und eine Eigenfunktion $U(x_\perp, \omega)$, so daß (vgl. Abschnitt 1.3)

$$L(k(\omega), \omega)U(x_\perp, \omega) = U(x_\perp, \omega) = 0. \tag{2.6}$$

Hierbei wurde die Bezeichnung $x_\perp = (x, y)$ verwendet. Durch die Gleichung (2.6) läßt sich die Wellenzahl k in Abhängigkeit von der Frequenz ω bestimmen. Daher wird (2.6) auch Dispersionsbeziehung genannt, bei der Herleitung der NLS werden wir von ihr oft Gebrauch machen.

Im nächsten Kapitel werden wir benötigen, daß $< U, \partial L/\partial k U >$ für $k > 0$ negativ ist. Sei nun $U = (U_x, U_y, U_z)$, dann liefert (2.6)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}\right)U_x(x_\perp) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U_y(x_\perp) = ik\frac{\partial}{\partial x}U_z(x_\perp) \tag{2.7}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U_x(x_\perp) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2(r,\omega)}{c^2}\right)U_y(x_\perp) = ik\frac{\partial}{\partial y}U_t(x_\perp) \tag{2.8}$$

$$\left(\triangle_\perp + \omega^2 \frac{n^2(r,\omega)}{c^2}\right)U_z = -ik\frac{\partial}{\partial x}U_x - ik\frac{\partial}{\partial y}U_y. \tag{2.9}$$

Im allgemeinen ist U komplexwertig. Da in einer verlustfreien Faser n reell ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß U_z rein imaginär und U_x sowie U_y rell sind.

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial k} = \begin{pmatrix} -2k & 0 & -i \\ 0 & -2k & -i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} &\left\langle U, \partial L/\partial k U \right\rangle \\ =& -2k \int_{\mathbb{R}^2} |U_x(x,y)|^2 + |U_y(x,y)|^2 dxdy \\ &- i \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}_x(x,y)U_z(x,y) + \bar{U}_z(x,y)U_x(x,y) + \bar{U}_y(x,y)U_z(x,y) + \bar{U}_z(x,y)U_y(x,y)dxdy. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Aufgrund der obigen Annahmen über die Gestalt von U verschwindet das zweite Integral und es folgt: $\langle U, \partial L/\partial k U\rangle < 0$ für $k > 0$.

Desweiteren ist folgende Eigenschaft für die Herleitung der NLS wichtig:

$$k(l\omega) \neq lk(\omega) \text{ für } l \neq \pm 1. \tag{2.12}$$

Dies wollen wir nun rechtfertigen, dazu schreiben wir den Eigenwert als

$$k(\omega) = \bar{n}(\omega)\frac{\omega}{c}. \tag{2.13}$$

Hierbei wird $\bar{n}$ der Modenindex genannt. Aufgrund von (1.37) wissen wir

$$n_2(\omega) < \bar{n}(\omega) < n_1(\omega) \ \forall \ \omega. \tag{2.14}$$

Da $n_1^2 - n_2^2$ in einer Einmodenfaser klein ist, gilt

$$\bar{n}(\omega) \sim \frac{1}{2}(n_1(\omega) + n_2(\omega)). \tag{2.15}$$

Wir haben also eine Näherung für $k(\omega)$ gefunden: $k(\omega) = \omega(n_1 + n_2)/2c$. Der reelle Brechungsindex ist der Realität eine gerade Funktion, die für $\omega > 0$ streng monoton wächst (vgl. dazu Abschnitt 2.3.2 in [3]). Daher scheint die Annahme

$$\bar{n}(l\omega) \neq \bar{n}(\omega) \text{ für } l \neq \pm 1 \tag{2.16}$$

sinnvoll zu sein, es läßt sich nun auch

$$k(l\omega) \neq lk(\omega) \text{ für } l \neq \pm 1. \tag{2.17}$$

folgern.

Bemerkung 2.2.1. *Diese Eigenschaft wird in der Literatur oft mit der Dispersion erklärt, also der Frequenzabhängigkeit der Wellenzahl. Daraus läßt sich jedoch nicht direkt $k(l\omega) \neq lk(\omega)$ für $l \neq \pm 1$ für jedes ω folgern.*

Bemerkung 2.2.2. *Mit Hilfe des Skalarprodukts* (2.4) *läßt sich die Dispersionsbeziehung* (2.6) *wie folgt umformulieren:*

$$D(k, \omega, U) = \langle U, L(k, \omega)U\rangle = 0 \tag{2.18}$$

Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt an, daß ein Stufenprofil vorliegt. In diesem Fall ist das elektrische Feld nach (1.23) *divergenzfrei. Mit Hilfe des zu* (2.6) *gehörigen Rayleighquotienten*

$$F(U) := \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n^2 \left|U\right|^2 \, dx\, dy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\nabla_\perp U\right|^2 \, dx\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U\right|^2 \, dx\, dy} \tag{2.19}$$

können wir uns dem Eigenwert auch durch Lösen des Variationsproblems

$$\min_{U \neq 0} F(U) \tag{2.20}$$

nähern: Falls U Minimum ist, so ist U Eigenfunktion von L. Für den zugehörigen Eigenwert gilt $k^2 = F(U)$.

2.3. Quasimonochromatische Welle

Mit Hilfe der Fouriertransformation läßt sich das elektrische Feld schreiben als

$$E(x_\perp, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(x_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega. \tag{2.21}$$

Wir nehmen an, daß das Eingangssignal quasimomochromatisch mit Frequenz ω_1 ist. Dies soll bedeuten, daß der Träger von $\hat{E}$ zunächst nur in einer ϵ-Umgebung von ω_1 liegt. Der Parameter ϵ ist ein Maß für die Abweichung von einem monochromatischen Feld. Aufgrund der nichtlinearen Struktur der Polarisation können bei der Ausbreitung in der Faser auch noch andere Frequenzanteile der Gestalt $\omega_l := l\omega_1$ auftreten. Die Situation soll in folgendem Diagramm verdeutlicht werden:

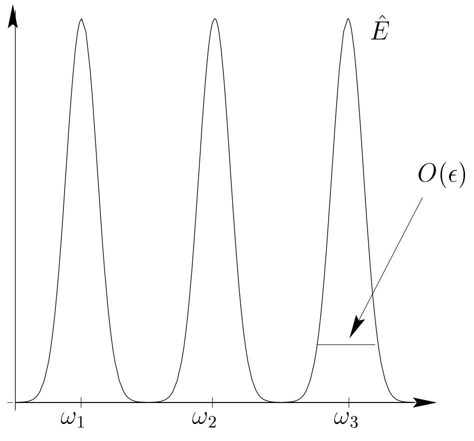


Abbildung 2.1.: Graphische Darstellung der Fouriertransformierten von E

Demnach impliziert die Annahme folgende Gestalt der Fouriertransformierten von E:

$$\hat{E}(x_\perp, z, \omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l(x_\perp, z, \omega), \tag{2.22}$$

wobei $\mathrm{supp}(A_l) \subset (\omega_l - \epsilon, \omega_l + \epsilon)$. Dabei bezeichne $\mathrm{supp}(A_l)$ den Träger von A_l.

Mit Hilfe der Fouriertransformation und der quasimonochromatischen Annahme werden wir jetzt die Felder A_l durch sogenannte Wellenpakete ersetzen.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
E(x_\perp, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(x_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_l(x_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_l-\epsilon}^{\omega_l+\epsilon} A_l(x_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_l(x_\perp, z, \omega_l + \triangle\omega_l) e^{-i\triangle\omega_l t}\, d(\triangle\omega_l) e^{-i\omega_l t} \text{ mit } \omega = \omega_l + \triangle\omega_l \\
&=: \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_l(x_\perp, z, t) e^{-i\omega_l t} \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

mit der Definition

$$
\tilde{E}_l(x_\perp, z, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_l(x_\perp, z, \omega_l + \triangle\omega_l) e^{-i\triangle\omega_l t}\, d(\triangle\omega_l). \qquad (2.24)
$$

Wie beim Betrachten des linearen Problems nehmen wir nun an, daß E_1 sich näherungsweise gemäß $e^{ik_1 z}$ in der Faser ausbreitet, d.h.

$$
\tilde{E}_1(x_\perp, z, t) e^{-i\omega_1 t} = E_1(x_\perp, z, t) e^{ik_1 z - i\omega_1 t} \qquad (2.25)
$$

mit noch unbekannter Ausbreitungskonstante k_1, die aufgrund der Dispersion abhängig von ω_1 ist. Aufgrund der nichtlinearen Polarisation breitet sich $\tilde{E}_l$ dann gemäß $e^{ilk_1 z}$ aus. Zusammenfassend läßt sich die quasimonochromatische Annahme also so formulieren: Das elektrische Feld hat die Gestalt

$$
E(x_\perp, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l(x_\perp, z, t) e^{i(k_l z - \omega_l t)} \qquad (2.26)
$$

mit $\omega_l = l\omega_1$ und $k_l = lk_1$. Da das elektrische Feld reellwertig ist, gilt $E_l = \bar{E}_{-l}$. Die Felder E_l aus (2.26) werden Wellenpakete genannt.

Bemerkung 2.3.1. *Dieser Ansatz ist der natürliche, um die NLS herzuleiten. Wie sich später zeigen wird, sind allerdings die Felder mit anderen Frequenzanteilen als $\pm\omega_1$ von höherer Ordnung in ϵ, und daher könnte man auch*

$$
E(x_\perp, z, t) \sim E_1(x_\perp, z, t) e^{ik_1 z - i\omega_1 t} + \bar{E}_1(x_\perp, z, t) e^{-(ik_1 z - i\omega_1 t)}
$$

als Ansatz wählen. Dies geschieht in Abschnitt 3b des Buches von Newell und Moloney [6]; dort wird mit Hilfe eines „multiple-scale“ Ansatzes die NLS hergeleitet. Mit dem dortigen Verfahren ist es aber nicht möglich, auch die NLS höherer Ordnung (HNLS) exakt herzuleiten. Daher wurde hier der Weg von Kodama und Hasegawa gewählt, die Herleitung nach Newell und Moloney wird jedoch in Anhang A kurz beschrieben.

2.3.1. Die Polarisation für ein quasimonochromatisches Feld

Um eine Gleichung für die einzelnen Wellenpakete herzuleiten, muß nun die Polarisation mit dem Ansatz (2.26) auf ein quasimonochromatisches Feld umgerechnet werden. Dazu wollen wir annehmen, daß $\hat{\chi}^{(1)}$ und $\hat{\chi}^{(3)}$ analytisch sind.

Für den linearen Anteil der Polarisation gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0} P_L(E) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_0} P_l(E) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
& \text{(nach Faltungsformel)} \\
=& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) A_l(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \\
& \text{(aufgrund von (2.26))} \\
=& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_l + \triangle\omega_l) A_l(\omega_l + \triangle\omega_l) e^{-i\triangle\omega_l t}\, d(\triangle\omega_l) e^{i\omega_l t} \\
& \text{(mit Hilfe der Substitution } \omega = \omega_l + \triangle\omega_l\text{)} \\
=& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \hat{\chi}^{(1)}}{\partial\omega^k}(\omega_l) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\triangle\omega_l)^k A_l(\omega_l + \triangle\omega_l) e^{-i\triangle\omega_l t}\, d(\triangle\omega_l) e^{i\omega_l t} \\
& \text{(aufgrund der Analytizität)} \\
=& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_l t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \hat{\chi}^{(1)}}{\partial\omega^k}(\omega_l) \left[(i\frac{\partial}{\partial t})^k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} A_l(\omega_l + \triangle\omega_l) e^{-i\triangle\omega_l t}\, d(\triangle\omega_l) \right] \\
=& \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(k_l z - \omega_l t)} \left[\hat{\chi}^{(1)}(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t}) E_l(t) \right] \qquad (2.27) \\
& \text{(aufgrund von (2.24) und (2.25))}
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß $\partial/\partial t$ nur auf E_l wirkt. Jetzt können wir auch die Zeitableitung berechnen, die aufgrund der Wellengleichung (1.13) von besonderem Interesse ist. Dabei benutzen wir, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_l(z,t) e^{i(k_l z - \omega_l t)}) = e^{i(k_l z - \omega_l t)} \left[(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_l) E_l(z,t) \right] = e^{i(k_l z - \omega_l t)} \left[-i(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t}) E_l(z,t) \right] \qquad (2.28)$$

gilt. Insgesamt läßt sich nun die Formel

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P_L(E)}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(k_l z - \omega_l t)} \left[(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t})^2 \hat{\chi}^{(1)}(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t}) E_l(t) \right] \qquad (2.29)$$

folgern.

In der gleichen Weise, nur mit größerem Rechenaufwand, kann auch die Nichtlinearität

$$\frac{1}{\epsilon_0}P_{NL}(E) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3)(E(t_1)\cdot E(t_2))E(t_3)\,dt_1\,dt_2\,dt_3 \tag{2.30}$$

vereinfacht werden. Die Fouriertransformierte der Suszeptibilität $\chi^{(3)}$ ist definiert als

$$\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(3)}(t_1,t_2,t_3)e^{i(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\omega_3 t_3)}\,dt_1\,dt_2\,dt_3.$$

Um eine Verallgemeinerung der Formel im Mehrdimensionalen zu erreichen, wird zunächst die Fouriertransformierte von (2.30) bezüglich t berechnet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon_0}\hat{P}_{NL}(E)\\
&=\int_{\mathbb{R}^4}\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3)(E(t_1)\cdot E(t_2))E(t_3)\,dt_1\,dt_2\,dt_3e^{i\omega t}\,dt\\
&=\int_{\mathbb{R}^4}\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3)(E(t_1)\cdot E(t_2))E(t_3)e^{i(\omega_1 t+\omega_2 t+\omega_3 t)}\,dt_1\,dt_2\,dt_3e^{i(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3)t}\,dt\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^4}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(\hat{E}(\omega_1)\cdot\hat{E}(\omega_2))\hat{E}(\omega_3)e^{i(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3)t}\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3\,dt\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(\hat{E}(\omega_1)\cdot\hat{E}(\omega_2))\hat{E}(\omega_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega)\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3,
\end{aligned}$$

wobei die δ-Distribution durch Integration über t entsteht. Für die in dieser Arbeit benutzten grundlegenden Eigenschaften der δ-Distribution sowie die Grundlagen der Fouriertransformation sei auf das Buch von Brigola [7] verwiesen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon_0}P_{NL}(E)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_0}\hat{P}_{NL}(E)e^{-i\omega t}\,d\omega\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(\hat{E}(\omega_1)\cdot\hat{E}(\omega_2))\hat{E}(\omega_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega)\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3e^{-i\omega t}\,d\omega\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)(\hat{E}(\omega_1)\cdot\hat{E}(\omega_2))\hat{E}(\omega_3)e^{i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t}\,d\omega_1\,d\omega_2\,d\omega_3
\end{aligned}$$

aufgrund der Definition der δ-Distribution. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon_0}P_{NL}(E)\\
&=\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_l+\triangle\omega_l,\omega_m+\triangle\omega_m,\omega_n+\triangle\omega_n)(A_l(\omega_l+\triangle\omega_l)\cdot A_m(\omega_m+\triangle\omega_m))\\
&\qquad A_n(\omega_n+\triangle\omega_n)e^{-i(\triangle\omega_l+\triangle\omega_m+\triangle\omega_n)t}d\triangle\omega_l d\triangle\omega_m d\triangle\omega_n e^{-i(\omega_l+\omega_m+\omega_n)t}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun die Taylorreihe für $\hat{\chi}^{(3)}(\omega_l + \triangle\omega_l, \omega_m + \triangle\omega_m, \omega_n + \triangle\omega_n)$ um $(\omega_l, \omega_m, \omega_n)$ an, so folgt analog zum linearen Fall

$$\frac{1}{\epsilon_0}P_{NL}(E) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]}\Big[\hat{\chi}^{(3)}(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t_l}, \omega_m + i\frac{\partial}{\partial t_m}, \omega_n + i\frac{\partial}{\partial t_n})(E_l(t)\cdot E_m(t))E_n(t)\Big],$$

wobei die indizierten Ableitungen definiert sind als $\frac{\partial}{\partial t_l}((E_l \cdot E_m)E_n) = (\frac{\partial E_l}{\partial t} \cdot E_m)E_n$ usw. Auch hier wirkt die Differentiation nur auf E_l, und wir sind an der Zeitableitung von P_{NL} interessiert. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[(E_l \cdot E_m)E_n e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]}\right] \\
&= \Big[(\frac{\partial E_l}{\partial t} \cdot E_m)E_n + (E_l \cdot \frac{\partial E_m}{\partial t})E_n + (E_l \cdot E_m)\frac{\partial E_n}{\partial t} - i(l+m+n)\ \omega_1 (E_l \cdot E_m)E_n\Big] \\
&\qquad\qquad \cdot e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]} \\
&= e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]}\Big[(-i\omega_l + \frac{\partial}{\partial t_l} - i\omega_m + \frac{\partial}{\partial t_m} - i\omega_n + \frac{\partial}{\partial t_n})(E_l \cdot E_m)E_n\Big]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

und erhalten daraus

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}(E)}{\partial t^2} \\
&= -\frac{1}{c^2}\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty}\left(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t_l} + \omega_m + i\frac{\partial}{\partial t_m} + \omega_n + i\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^2 \\
&\qquad \hat{\chi}^{(3)}(\omega_l + i\frac{\partial}{\partial t_l}, \omega_m + i\frac{\partial}{\partial t_m}, \omega_n + i\frac{\partial}{\partial t_n})(E_l \cdot E_m)E_n e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]} \\
&= -\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} e^{[i(l+m+n)(k_1 z - \omega_1 t)]}\frac{(\omega^{(l)} + \omega^{(m)} + \omega^{(n)})^2}{c^2}\hat{\chi}^{(3)}(\omega^{(l)}, \omega^{(m)}, \omega^{(n)})(E_l \cdot E_m)E_n,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

wobei $\omega^{(l)} := \omega_l + i\frac{\partial}{\partial t_l}$ usw. gesetzt wurde.

Damit haben wir nun die beiden kompliziertesten Terme in der Ausgangsgleichung (1.13) auf ein quasimonochromatisches Feld umgerechnet. Im nächsten Kapitel werden wir aus (1.13) eine Gleichung für die einzelnen Wellenpakete E_l herleiten, der schwierigste Teil ist durch (2.29) und (2.32) bereits erledigt.

3. Herleitung der NLS

In diesem Kapitel wird direkt aus den Maxwellschen Gleichungen und den Annahmen des letzten Kapitels die Gleichung hergeleitet, die die Ausbreitung der Amplitude einer quasimonochromatischen Welle in einer verlustfreien Einmodenfaser beschreibt. Wir werden sehen, daß das elektrische Feld in erster Näherung durch

$$E(x_\perp, z, t) = \epsilon A_1(\xi, \tau) U(x_\perp) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + \epsilon \bar{A}_1(\xi, \tau) \bar{U}(x_\perp) e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} \tag{3.1}$$

beschrieben werden kann. Hierbei sind $k_1 = k(\omega_1)$ und U Eigenwert bzw. Eigenmode der Gleichung $L(k, \omega_1)U = 0$, die bereits im letzten Kapitel untersucht wurde. Die skalare Funktion A_1 beschreibt die langsam variierende Amplitude des elektrischen Feldes und genügt der Nichtlinearen Schrödingergleichung (NLS)

$$i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu \left|A_1\right|^2 A_1 = 0, \tag{3.2}$$

wobei $\nu > 0$ ist. In einer weiteren Näherung werden wir zeigen, daß die Amplitude (in einem später genauer erklärten Sinne) näherungsweise die Nichtlineare Schrödingergleichung höherer Ordnung (HNLS) erfüllt:

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu \left|A\right|^2 A = \epsilon \left(\frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} - i\frac{\partial \nu}{\partial \omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(\left|A\right|^2 A) - i\mu A \frac{\partial \left|A\right|^2}{\partial \tau} \right) \tag{3.3}$$

Der Beweis lehnt sich an die reduktive Störungsmethode an, die zuerst von Taniuti vorgeschlagen wurde [8] und z.B. bei Jeffrey und Kawahara [9] beschrieben wird. Das weitere Verfahren basiert auf Arbeiten von Kodama und Hasegawa [10, 11, 12]. Bei der Herleitung lehnen wir uns an Kapitel 3 in [10] an. Die teils umfangreichen Rechnungen sind allerdings dort nicht zu finden. Zunächst folgern wir aus den Maxwellschen Gleichungen eine Gleichung für jedes Wellenpaket E_l. Weiter werden wir annehmen, daß sich die einzelnen Wellenpakete um $\epsilon = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann Gleichungen der Form $LE_l = F$, die aufgrund der Fredholmalternative genau dann lösbar sind, falls $\langle U, F \rangle = 0$ $(*)$. Hierbei wird benötigt, daß der Operator L selbstadjungiert ist. Aus Beziehungen der Form $(*)$ lassen sich Bedingungen über die Gestalt der einzelnen Wellenpakete herleiten, die schließlich die NLS bzw. HNLS ergeben.

3.1. Maxwellsche Gleichung für Wellenpakete

In diesem Abschnitt werden wir zunächst eine Variablentransformation durchführen, die in der Theorie der Wellen üblich ist. Ausgehend davon wird dann die Maxwellsche Gleichung für die einzelnen Wellenpakete E_l in den neuen Variablen hergeleitet, die die Basisgleichung für das weitere Vorgehen im nächsten Abschnitt sein wird.

Um die Transformation zu motivieren, schreiben wir das elektrische Feld wie folgt:

$$E(x_\perp, z, t) = \mathrm{Re}(A(x_\perp, z, t)e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}) \tag{3.4}$$

Dabei nennen wir A die langsam variierende (komplexe) Amplitude, $\mathrm{Re}(\cdot)$ bezeichne den Realteil; k_1 und ω_1 sind die Wellenzahl bzw. die Frequenz. Das folgende Diagramm soll die Situation verdeutlichen, man beachte jedoch, daß hier die Funktionen reellwertig sind.

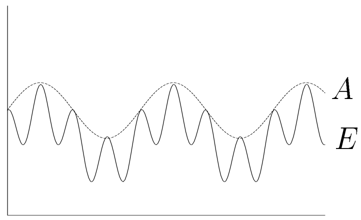


Abbildung 3.1.: Die langsam variierende Amplitude A einer reellen Welle E

Ein Medium, in dem der Brechungsindex abhängig von der Frequenz ω ist, wird dispersiv genannt. In so einem Medium ist die Wellenzahl $k(\omega)$ nicht linear in ω, desweiteren läßt sie sich um die Frequenz ω_1 entwickeln. Es gilt

$$k(\omega) - k_1 = \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_1)(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_1)(\omega - \omega_1)^2 + \cdots . \tag{3.5}$$

Wir setzen nun $\triangle\omega := \omega - \omega_1$, $\triangle k := k - k_1$, sowie $k' = \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_1)$. Die Fouriertransformatierte von A sei definiert als

$$\hat{A}(x_\perp, \triangle k, \triangle\omega) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x_\perp, z, t)e^{i(\triangle\omega t - \triangle k z)}dz\, dt. \tag{3.6}$$

Die inverse Transformation ist dann gegeben durch

$$A(x_\perp, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(x_\perp, z, t)e^{-i(\triangle\omega t - \triangle k z)}d(\triangle k)\, d(\triangle\omega). \tag{3.7}$$

Wir erkennen, daß $\triangle\omega$ bzw. $\triangle k$ mit $i\partial/\partial t$ bzw. $-i\partial/\partial z$ identifiziert werden können. Demnach läßt sich (3.5) als

$$i(\frac{\partial A}{\partial z} + k'\frac{\partial A}{\partial t}) - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{3.8}$$

schreiben. Falls nun $k'' = 0$, und die Anfangsbedingung $A(x_\perp, z, 0) = A_0(x_\perp, z)$ gesetzt wird, so findet man die Lösung als

$$A(x_\perp, z, t) = A_0(x_\perp, t - k'z). \tag{3.9}$$

Dies kann so verstanden werden, daß die Koordinate $\tau = t - k'z$ sich mit der Welle bewegt. Motiviert durch diese Betrachtungen substituieren wir nun im quasimonochromatischen Ansatz (2.26)

$$\xi = \epsilon^2 z, \quad \tau = \epsilon(t - z/v_g), \tag{3.10}$$

wobei v_g die Geschwindigkeit der Welle darstellen soll, und vermuten $k' = 1/v_g$. Es sei daran erinnert, daß ϵ ein Ausdruck für die Impulsbreite ist. Die unterschiedliche Skalierung durch ϵ ist zunächst unklar. Sie dient dazu, daß die später gewonnene Gleichung direkt die Standardform der NLS annimmt. Dies erkennt man auch anhand des in Anhang A beschriebenen Verfahrens.

Bemerkung 3.1.1. *In Gleichung* (3.8) *tauchen bereits die linearen Anteile der NLS auf. Eine genauere Approximation des elektrischen Feldes führt auf eine exaktere Gleichung, die HNLS. Deren linearer Anteil enthält weitere Summanden, die von einer genaueren Entwicklung der Wellenzahl stammen.*

Das elektrische Feld in den neuen Variablen ξ und τ lautet aufgrund der quasimonochromatischen Annahme (vgl. (2.26))

$$E(x_\perp, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l(x_\perp, \xi, \tau; \epsilon) e^{i(k_l z - \omega_l t)}. \tag{3.11}$$

Aus der Maxwellgleichung

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_L(E)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}(E)}{\partial t^2} \tag{3.12}$$

werden wir nun eine Gleichung für die einzelnen Wellenpakete herleiten.

Aufgrund der Substitution (3.10) schreiben sich die Differentialoperatoren in den neuen Variablen wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(E_l(z,t)e^{i(k_l z - \omega_l t)}) &= (\frac{\partial E_l}{\partial \tau}(\xi,\tau)\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial E_l}{\partial \xi}(\xi,\tau)\frac{\partial \xi}{\partial t} - i\omega_l E_l(\xi,\tau))e^{i(k_l z - \omega_l t)} \\ &= (\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_l)E_l(\xi,\tau)e^{i(k_l z - \omega_l t)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(E_l(z,t)e^{i(k_l z - \omega_l t)}) &= (\frac{\partial E_l}{\partial \tau}(\xi,\tau)\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial E_l}{\partial \xi}(\xi,\tau)\frac{\partial \xi}{\partial z} + ikE_l(\xi,\tau))e^{i(k_l z - \omega_l t)} \\ &= (-\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial \xi} + ik_l)E_l(\xi,\tau)e^{i(k_l z - \omega_l t)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Also gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E_l(z,t)e^{i(k_l z - \omega_l t)}) = -(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau})^2 E_l(\xi,\tau)e^{i(k_l z - \omega_l t)} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(E_l(z,t)e^{i(k_l z - \omega_l t)}) = -(k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial \tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial \xi})^2 E_l(\xi,\tau)e^{i(k_l z - \omega_l t)}, \tag{3.16}$$

wobei die Differentiation nur auf E_l wirkt. Dies wird nun in (3.12) eingesetzt. Zunächst berechnen wir die linke Seite von (3.12) unter Verwendung von (3.15) und (3.16), desweiteren benutzen wir den Ausdruck für P_L in (2.29). Dort müssen wir noch den Differentialoperator $\partial/\partial t$ durch $\epsilon\partial/\partial\tau$ ersetzen. Insgesamt gelangt man zu:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Bigg[\Delta_\perp - (k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi})^2 + \frac{(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau})^2}{c^2}$$
$$+\frac{(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau})^2}{c^2}\hat{\chi}^{(1)}(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}) - \nabla(\nabla\cdot)\mid_{\frac{\partial}{\partial z}=ik_l-\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi}}\Bigg]E_l(x_\perp,\xi,\tau;\epsilon)e^{i(k_l z-\omega_l t)}$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Bigg[\Delta_\perp - k^2 + \frac{\omega^2 n(\omega)^2}{c^2} - \nabla(\nabla\cdot)\mid_{\frac{\partial}{\partial z}=ik}\Bigg]E_l(x_\perp,\xi,\tau;\epsilon)e^{i(k_l z-\omega_l t)}, \tag{3.17}$$

wobei in der letzten Gleichung zur Vereinfachung

$$k = k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{3.18}$$
$$\omega = \omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{3.19}$$

gesetzt wurde.

Mit der Notation $\triangle_\perp = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$ definieren wir nun einen linearen Differentialoperator L als:

$$L(k,\omega) := \triangle_\perp - k^2 + \frac{\omega^2 n(\omega)^2}{c^2} - \nabla(\nabla\cdot)\mid_{\frac{\partial}{\partial z}=ik} \tag{3.20}$$

Damit schreibt sich der lineare Anteil von (3.12), also die linke Seite, als

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} L(k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi}, \omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau})E_l(x_\perp,\xi,\tau;\epsilon)e^{i(k_l z-\omega_l t)}, \tag{3.21}$$

und es gilt

$$L(k,\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} & -\frac{\partial^2}{\partial xy} & -ik\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial xy} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} & -ik\frac{\partial}{\partial y} \\ -ik\frac{\partial}{\partial x} & -ik\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Demnach ist L der gleiche Operator, der bereits bei der Untersuchung des linearen Problems in Kapitel 1 untersucht wurde. Aufgrund der Einmodenfaserannahme kennen wir bereits Eigenwerte und Eigenmoden von L, dies wird im nächsten Schritt von großer Bedeutung sein.

Nun wird die Nichtlinearität, also die rechte Seite von (3.12), untersucht. Mit Hilfe der Darstellung (2.32) von P_{NL} für ein quasimonochromatisches Feld folgt nun, wenn wir $\partial/\partial t_l$ durch $\epsilon\partial/\partial\tau_l$ ersetzen

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}(E)}{\partial t^2} = -\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty}\frac{(\omega^{(l)}+\omega^{(m)}+\omega^{(n)})^2}{c^2}\hat{\chi}^{(3)}(\omega^{(l)},\omega^{(m)},\omega^{(n)})(E_l\cdot E_m)E_n e^{[i(l+m+n)(k_1z-\omega_1 t)]}. \tag{3.23}$$

Dabei gilt $\omega^{(l)} = \omega_l + i\epsilon\partial/\partial\tau_l$ usw. Jetzt definieren wir den Operator N als

$$N(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)}) := \frac{(\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\omega^{(3)})^2}{c^2}\hat{\chi}^{(3)}(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)}), \tag{3.24}$$

und der nichtlineare Anteil von (3.12), also die rechte Seite, wird zu

$$-\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} N(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_l},\omega_m + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_m},\omega_n + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_n})(E_l\cdot E_m)E_n e^{[i(l+m+n)(k_1z-\omega_1 t)]}. \tag{3.25}$$

Insgesamt schreibt sich mit diesen Überlegungen (3.12) als

$$\begin{aligned}&\sum_{l=-\infty}^{\infty} L(k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi},\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau})E_l e^{il(k_1z-\omega_1 t)}\\ &+\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} N(\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_l} + \omega_m + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_m} + \omega_n + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_n})(E_l\cdot E_m)E_n e^{[i(l+m+n)(k_1z-\omega_1 t)]} = 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich die Gleichung für das Wellenpaket E_l

$$\begin{aligned}&L(k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi},\omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau})E_l\\ &+\sum_{l_1+l_2+l_3=l} N(\omega_{l_1} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_1}},\omega_{l_2} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_2}},\omega_{l_3} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_3}})(E_{l_1}\cdot E_{l_2})E_{l_3} = 0.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Diese Gleichung ist das Ergebnis dieses Abschnitts, wir werden sie im nächsten Abschnitt nach Potenzen von ϵ entwickeln. Zur Herleitung wurde lediglich die quasimonochromatische Annahme mit der Substitution (3.10) benötigt.

3.2. Entwicklung in Potenzen von ϵ

Wie bereits angekündigt, wollen wir jetzt annehmen, daß sich jedes Wellenpaket E_l sowie die Operatoren L und N in eine Taylorreihe bezüglich ϵ entwickeln lassen. Im weiteren Verlauf werden wir durch Koeffizientenvergleich der einzelnen Potenzen von ϵ Näherungen für das elektrische Feld herleiten. Es möge also gelten:

$$E_l(x_\perp, \xi, \tau; \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n E_l^{(n)}(x_\perp, \xi, \tau) \tag{3.28}$$

Wir erinnern daran, daß ϵ ein Maß für die Impulsbreite ist, daher ist $E_l(x_\perp, \xi, \tau; \epsilon = 0) = 0$, und die Summe startet erst bei $n = 1$. Da das elektrische Feld reellwertig ist, folgt $E_l = \bar{E}_{-l}$, also auch

$$E_l^{(n)} = \bar{E}_{-l}^{(n)}. \tag{3.29}$$

Aufgrund dieser Tatsache werden wir die expliziten Formeln für $E_l^{(n)}$ nur im Fall $l > 0$ notieren. Die Operatoren

$$\tilde{L}_l(\epsilon) := L(k_l + i\frac{\epsilon}{v_g}\frac{\partial}{\partial\tau} - i\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi}, \omega_l + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}) \tag{3.30}$$

und

$$N(\omega_{l_1} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_1}}, \omega_{l_2} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_2}}, \omega_{l_3} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_3}}) \tag{3.31}$$

werden ebenfalls um $\epsilon = 0$ entwickelt. Dabei beachten wir, daß die Nichtlinearität kubisch und daher von der Ordnung ϵ^3 ist. Wir definieren nun

$$L_l := \tilde{L}_l(0) = L(k_l, \omega_l) \tag{3.32}$$
$$N_{lmn} := N(\omega_l, \omega_m, \omega_n) \tag{3.33}$$

und starten mit dem Koeffizientenvergleich in erster Ordnung.

Die Ordnung ϵ^1:

In erster Näherung gilt mit obiger Definition

$$L_l E_l^{(1)}(x_\perp, \xi, \tau) = 0. \tag{3.34}$$

Der Kern von $L_l = L(k_l, \omega_l)$ wurde bereits bei der Betrachtung des linearen Problems untersucht. An dieser Stelle werden wir die Einmodenfaserannahme benötigen. Aufgrund dieser Annahme gilt:

$$N\left(L(k_l, \omega_l)\right) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; k_l = k(\omega_l) \tag{3.35}$$

Hierbei ist $N(L)$ der Kern von L, und mit $k(\omega)$ wurden die Eigenwerte von L zu festem ω bezeichnet.

Zur Frequenz ω_1 finden wir jetzt den Eigenwert $k(\omega_1)$ und die zugehörige Eigenmode $U(x_\perp, \omega_1)$. In Abschnitt 1.3 haben wir gesehen, daß man $k_1 := k(\omega_1)$ positiv wählen kann. Demnach finden wir für $l = 1$ die allgemeine Lösung von (3.34) als $E_1^{(1)}(x_\perp, \xi, \tau) = A_1(\xi, \tau, \omega_1) U(x_\perp, \omega_1)$, wobei A_1 konstant in x und y ist.
Im Fall $l = -1$ sei an $k_1 = -k_{-1}$ erinnert. Demzufolge ist $\bar{U}$ Eigenmode zum Eigenwert k_{-1}, die Lösung von (3.34) ist $E_{-1}^{(1)}(x_\perp, \xi, \tau) = \bar{A}_1(\xi, \tau, \omega_1) \bar{U}(x_\perp, \omega_1)$.
Ist $l \neq \pm 1$, so lautet der zugehörige Eigenwert $k(\omega_l)$. Aufgrund der Betrachtungen im letzten Kapitel ist dieser jedoch verschieden von $k_l = l k(\omega_1)$ für $l \neq \pm 1$. Daher existiert also nur die triviale Lösung $E_l^{(1)} = 0$.
Somit wurde die allgemeine Lösung von (3.34) als

$$E_l^{(1)}(x_\perp, \xi, \tau) = \begin{cases} A_1(\xi, \tau) U(x_\perp, \omega_1) & : l = 1 \\ 0 & : l \neq \pm 1 \end{cases} \tag{3.36}$$

gefunden. Dabei ist $A_1(\xi, \tau)$ noch zu bestimmen und wird später die NLS erfüllen. Die Abghängigkeit von A_1 von ω_1 wurde dabei unterdrückt. Wie man sehen wird, spielt sie in der Herleitung der Gleichungen keine Rolle.

Die Ordnung ϵ^2:

Die Gleichung in der Ordnung ϵ^2 lautet:

$$\tilde{L}_l(0) E_l^{(2)} = -\tilde{L}_l{}'(0) E_l^{(1)} \tag{3.37}$$

Um diese zu bestimmen, muß nun der erste Koeffizient in der Taylorentwicklung von $\tilde{L}_l$ berechnet werden. Es gilt

$$\tilde{L}_l{}'(\epsilon) = \frac{\partial L}{\partial k}\left(i \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial \tau} - 2i\epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial L}{\partial \omega}\left(i \frac{\partial}{\partial \tau}\right). \tag{3.38}$$

Also folgt für $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_l{}'(0) &= i \frac{1}{v_g} \frac{\partial L}{\partial k}(k_l, \omega_l) \frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial L}{\partial \omega}(k_l, \omega_l) \frac{\partial}{\partial \tau} \\ &= i \frac{1}{v_g} \frac{\partial L_l}{\partial k_l} \frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial L_l}{\partial \omega_l} \frac{\partial}{\partial \tau}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

und damit gilt in nächster Näherung in der Ordnung ϵ^2 :

$$L_l E_l^{(2)}(x_\perp, \xi, \tau) + \left(i \frac{1}{v_g} \frac{\partial L_l}{\partial k_l} \frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial L_l}{\partial \omega_l} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) E_l^{(1)}(x_\perp, \xi, \tau) = 0. \tag{3.40}$$

Wir schreiben nun wegen $L_l = L(k_l, \omega_l)$:

$$\frac{dL_l}{d\omega_l} := \frac{\partial L_l}{\partial k_l} k_l' + \frac{\partial L_l}{\partial \omega_l}, \tag{3.41}$$

$$\text{wobei} \quad k_l' = \frac{\partial k_l}{\partial \omega_l} = \frac{\partial (l k(\omega_1))}{\partial \omega_l} = l \frac{\partial k(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \omega_l} = \frac{\partial k(\omega_1)}{\partial \omega_1} = k_1'. \tag{3.42}$$

Dies in (3.40) eingesetzt, ergibt

$$L_l E_l^{(2)}(x_\perp,\xi,\tau) = -i\left(\frac{dL_l}{d\omega_l} + (\frac{1}{v_g} - k_l')\frac{\partial L}{\partial k_l}(k_l,\omega_l)\right)\frac{\partial E_l^{(1)}}{\partial \tau}(x_\perp,\xi,\tau). \tag{3.43}$$

Für $l \neq \pm 1$ gilt $E_l^{(1)} = 0$, und daher folgt

$$L_l E_l^{(2)}(x_\perp,\xi,\tau) = 0 \text{ für } l \neq \pm 1. \tag{3.44}$$

Also impliziert die Einmodenfaserannahme ($N(L_l) = \{0\}$ für $l \neq \pm 1$) :

$$E_l^{(2)}(x_\perp,\xi,\tau) = 0 \text{ für } l \neq \pm 1 \tag{3.45}$$

Für $l = 1$ gilt dann

$$L_1 E_1^{(2)}(x_\perp,\xi,\tau) = -i\left(\frac{dL_1}{d\omega_1}U(x_\perp,\omega_1) + (\frac{1}{v_g} - k_1')\frac{\partial L_1}{\partial k_1}U(x_\perp,\omega_1)\right)\frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi,\tau). \tag{3.46}$$

Auf diese Gleichung wird nun die Fredholmalternative angewandt. Wir haben gesehen, daß der Operator L_1 selbstadjungiert bzgl. des Skalarprodukts (2.4) ist. Die Fredholmalternative besagt nun: $N(L_1) \perp R(L_1)$. Dabei bezeichnet $N(L_1)$ den Kern und $R(L)$ das Bild von L. Da $N(L_1)$ von U aufgespannt wird, ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (3.46)

$$\left\langle U(x_\perp,\omega_1), L_1 E_1^{(2)}(x_\perp,\xi,\tau)\right\rangle = 0. \tag{3.47}$$

Beziehungen dieser Art wollen wir Kompatibilitätsbedingung nennen. Aus (3.46) folgt dann

$$-i\left\langle U(x_\perp,\omega_1), \frac{dL_1}{d\omega_1}U(x_\perp,\omega_1) + (\frac{1}{v_g} - k_1')\frac{\partial L_1}{\partial k_1}U(x_\perp,\omega_1)\right\rangle \frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi,\tau) = 0. \tag{3.48}$$

Aufgrund der Dispersionsbeziehung $L_1 U(x_\perp,\omega_1) = 0$ gilt auch $\frac{d}{d\omega_1}(L_1 U(x_\perp,\omega_1)) = 0$. Demzufolge ist $L_1\frac{dU}{d\omega_1} + \frac{dL_1}{d\omega_1}U = 0$, und es folgt

$$-i\left\langle U(x_\perp,\omega_1), \frac{dL_1}{d\omega_1}U(x_\perp,\omega_1)\right\rangle = i\left\langle U(x_\perp,\omega_1), L_1\frac{dU}{d\omega_1}(x_\perp,\omega_1)\right\rangle = 0, \tag{3.49}$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Selbstadjungiertheit von L_1 gilt. Daher vereinfacht sich (3.48) zu

$$(\frac{1}{v_g} - k_1')\left\langle U(x_\perp,\omega_1), \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U(x_\perp,\omega_1)\right\rangle = 0. \tag{3.50}$$

Weiter ist für $k_1 > 0$ nach Abschnitt 2.1

$$\left\langle U(x_\perp,\omega_1), \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U(x_\perp,\omega_1)\right\rangle < 0. \tag{3.51}$$

Dies impliziert: $1/v_g - k_1' = 0$. Wir haben damit die Gruppengeschwindigkeit v_g gefunden, diese eingesetzt in (3.46) liefert

$$L_1 E_1^{(2)}(x_\perp, \xi, \tau) = -i\frac{dL_1}{d\omega_1} U(x_\perp, \omega_1) \frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi, \tau) \tag{3.52}$$

$$= L_1 \frac{dU}{d\omega_1}(x_\perp, \omega_1) i \frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi, \tau). \tag{3.53}$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung findet man als

$$E_1^{(2)}(x_\perp, \xi, \tau) = i\frac{dU}{d\omega_1}(x_\perp, \omega_1) \frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi, \tau). \tag{3.54}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun, indem die Lösung der homogenen Gleichung $L_1 E_1^{(2)} = 0$, nämlich $A_2(\xi, \tau) U(x_\perp, \omega_1)$ mit noch zu bestimmendem A_2, zu (3.54) addiert wird. Also ist

$$E_l^{(2)} = \begin{cases} i\dfrac{dU}{d\omega_1}(x_\perp, \omega_1)\dfrac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi, \tau) + A_2(\xi, \tau) U(x_\perp, \omega_1) & \text{für } l = 1 \\ 0 & \text{für } l \neq \pm 1, \end{cases} \tag{3.55}$$

und wir können nun die nächsthöhere Ordnung ϵ^3 untersuchen.

Die Ordnung ϵ^3:

Hier taucht erstmalig die Nichtlinearität N auf. In dritter Ordnung gilt

$$\tilde{L}_l(0) E_l^{(3)} = -\tilde{L}_l{}'(0) E_l^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{L}_l{}''(0) E_l^{(1)} - \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = l} N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)}) E_{l_3}^{(1)}. \tag{3.56}$$

Zunächst muß die zweite Ableitung von $\tilde{L}_l(\epsilon)$ berechnet werden. Einsetzen von $1/v_g = k_1'$ in (3.38) ergibt

$$\tilde{L}_l{}'(\epsilon) = \frac{\partial L_l}{\partial k_l}(ik_1' \frac{\partial}{\partial \tau} - 2i\epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}) + \frac{\partial L_l}{\partial \omega_l}(i\frac{\partial}{\partial \tau}) \tag{3.57}$$

und für $\epsilon = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{L}_l{}'(0) &= ik_1' \frac{\partial L_l}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial L_l}{\partial \omega_l}(i\frac{\partial}{\partial \tau}) \\ &= i\frac{dL_l}{d\omega_l}\frac{\partial}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Um $\tilde{L}_l''(0)$ zu erhalten, wird (3.57) nach ϵ differenziert. Wir erhalten

$$\tilde{L}_l{}''(\epsilon) = \frac{\partial L_l}{\partial k_l}(-2i\frac{\partial}{\partial \xi}) + \frac{\partial^2 L_l}{\partial k_l^2}(ik_1'\frac{\partial}{\partial \tau} - 2i\epsilon\frac{\partial}{\partial \xi})^2 + 2\frac{\partial^2 L_l}{\partial k_l \partial \omega_l}(ik_1'\frac{\partial}{\partial \tau} - 2i\epsilon\frac{\partial}{\partial \xi}) i\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 L_l}{\partial \omega_l^2}(i\frac{\partial}{\partial \tau})^2. \tag{3.58}$$

Für $\epsilon = 0$ und $l = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\tilde{L_1}''(0) &= -2i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial \xi} - (k_1')^2\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2k_1'\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial \omega_1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 L_1}{\partial \omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\
&= -2i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + k_1''\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\
&= -2i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + k_1''\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

wobei hier

$$\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial \omega_1^2} + 2k_1'\frac{\partial^2 L_1}{\partial \omega_1 \partial k_1} + k_1''\frac{\partial L_1}{\partial k_1} + {k_1'}^2\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} \tag{3.60}$$

gesetzt wurde. Die gefundene Formel für $\tilde{L}_1''(0)$ wird nun in (3.56) für $l = 1$ eingesetzt. Man erhält folgende Gleichung für $E_1^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
L_1 E_l^{(3)} = &- i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \left[i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right] E_1^{(1)} \\
&- \sum_{l_1+l_2+l_3=1} N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Wir erinnern uns an die explizite Formel für $E_l^{(1)}$, es gilt $E_l^{(1)} = 0$ für $l \neq \pm 1$. Demnach wird in der Summe nur über $l_i = \pm 1$ summiert. Es gilt also $l_1 + l_2 + l_3 \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Insgesamt folgt aus diesen Überlegungen

$$L_1 E_l^{(3)} = \begin{cases} 0 & : l \neq \pm 1, \pm 3 \\ -N(\omega_1, \omega_1, \omega_1)(E_1^{(1)} \cdot E_1^{(1)})E_1^{(1)} & : l = 3 \\ -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\left[i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2}\right] - F(U)\left|A_1\right|^2 A_1 & : l = 1. \end{cases} \tag{3.62}$$

Dabei haben wir die Definition

$$F(U) := N_{-111}(\bar{U} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \bar{U})U + N_{11-1}(U \cdot U)\bar{U}, \text{ wobei } N_{lmn} := N(\omega_l, \omega_m, \omega_n)$$

benutzt. Hier tauchen also erstmals Anteile des elektrischen Feldes anderer Frequenz auf. Wir bemerken, daß sie von der Ordnung ϵ^3 sind. Für $l = 1$ können wir wieder die Fredholmsche Alternative anwenden:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle U, L_1 E_1^{(3)} \right\rangle \\
&= \left\langle U, -i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L}{d\omega^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} \right\rangle \\
&\quad + \left[i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2}\right]\left\langle U, \frac{\partial L}{\partial k_1}U \right\rangle - \left\langle U, F(U) \right\rangle |A_1|^2 A_1.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Wir werden nun sehen, daß der erste Summand verschwindet.

Satz 3.2.1. (Kompatibilitätsbedingung in der Ordnung ϵ^3)

Es gilt: $\left\langle U, -i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{d\omega^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right\rangle = 0.$

Ist dies gezeigt, so erhält man aus den letzten beiden Termen die NLS für A_1.

Beweis. Mit Hilfe der Produktregel

$$\frac{d}{d\omega_1}\left(L_1 E_1^{(2)}\right) = \frac{dL_1}{d\omega_1}E_1^{(2)} + L_1\frac{dE_1^{(2)}}{d\omega_1}$$

untersuchen wir zunächst den ersten Term:

$$-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} = -i\frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{d}{d\omega_1}\left(L_1 E_1^{(2)}\right) - L_1\frac{dE_1^{(2)}}{d\omega_1})$$

Aus der letzten Näherung ist bekannt, daß

$$L_1 E_1^{(2)} = -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \tau}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}
-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} &= -i\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{d}{d\omega}(-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \tau}) - L_1\frac{d}{d\omega_1}(E_1^{(2)})\right) \\
&= -(\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right)) + iL_1\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau}\right).
\end{aligned}$$

Durch Addition des zweiten Summanden folgt

$$-i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{d\omega^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} = -(\frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right)) + iL_1\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau}\right).$$

Weiter gilt

$$0 = \frac{d^2}{d\omega_1^2}\left(L_1\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right) = \frac{d^2L_1}{d\omega^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + 2\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right) + L_1\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right)$$

nach Produktregel und wegen $L_1 E_1^{(1)} = 0$. Jetzt vereinfacht sich die Summe zu

$$-i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}L_1\frac{d^2}{d\omega_1^2}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right) + iL_1\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau}\right).$$

Anwendung des Skalarprodukts liefert

$$\begin{aligned}
\left\langle U, -i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle U, L_1\frac{d^2}{d\omega_1^2}\left(\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}\right)\right\rangle + i\left\langle U, L_1\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau}\right)\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

aufgrund der Selbstadjungiertheit von L_1, was zu beweisen war. $\square$

Bemerkung 3.2.2. *Der Beweis wurde geführt ohne Benutzung der expliziten Formel für $E_1^{(2)}$ bzw. $E_1^{(2)}$, sondern nur durch Anwendung der bekannten Gleichungen. Aufgrund der impliziten Abhängigkeit von A_1 von ω_1 würden die Rechnungen nur aufwendiger.*

Nun gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle U, L_1 E_1^{(3)} \right\rangle \\ &= \left\langle U, \frac{\partial L}{\partial k_1} U \left[i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} \right] - F(U) \left|A_1\right|^2 A_1 \right\rangle \\ &= \left[i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} \right] \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \right\rangle - \left|A_1\right|^2 A_1 \Big\langle U, F(U) \Big\rangle. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Damit folgt jetzt

Satz 3.2.3. (Die Nichtlineare Schrödingergleichung)
Die Funktion $A_1(\xi, \tau)$ genügt

$$i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu \left|A_1\right|^2 A_1 = 0. \tag{3.65}$$

Dabei ist

$$\nu := \frac{b}{a} \text{ mit } a := \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \right\rangle \text{ und } b := -\Big\langle U, F(U) \Big\rangle \tag{3.66}$$

$$. \tag{3.67}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß ν aufgrund der Abhängigkeit der Suszeptibilität χ, sowie k_1, von ω_1 ebenfalls abhängig von ω_1 ist.

Bemerkung 3.2.4. *In der Literatur findet man oft folgende Formel für ν:*

$$\nu = \frac{\omega_1}{c} n_2(\omega_1). \tag{3.68}$$

Diese läßt sich leicht herleiten:

Wir haben bereits gesehen, daß $< U, dL_1/d\omega_1 >= 0$ ist. Demzufolge ist auch
$k_1' < U, \partial L_1/\partial k_1 U > + < U, \partial L_1/\partial \omega_1 U >= 0$. Dabei gilt für die Ableitung nach ω_1

$$\frac{\partial L_1}{\partial \omega_1} U = 2\frac{\omega_1}{c} n(\omega_1) \left(\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c} \right)' U. \tag{3.69}$$

Wir können nun a berechnen als

$$a = -\frac{2}{k_1'}\frac{\omega_1}{c} \left\langle U, n(\omega_1) \left(\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c} \right)' U \right\rangle. \tag{3.70}$$

Um b zu vereinfachen, erinnern wir an die Definitionen von $F(U) = N_{-111}(\bar{U} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \bar{U})U + N_{11-1}(U \cdot U)\bar{U}$ und $N_{lmn} := N(\omega_l, \omega_m, \omega_n)$. Weiter ist $N(\omega_l, \omega_m, \omega_n) = (\omega_l + \omega_m + \omega_n)^2 \hat{\chi}^{(3)}(\omega_l, \omega_m, \omega_n)/c^2$. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, *daß $\hat{\chi}^{(3)}$ symmetrisch in den Argumenten ist (Abschnitt 2d in [6]); daher schreiben wir nur noch $\hat{\chi}_3^{(3)}(\omega_1)$. Insgesamt folgt aus diesen Überlegungen*

$$b = -\langle U, F(U)\rangle = \frac{\omega_1^2}{c^2}\hat{\chi}_3^{(3)}(\omega_1)\left\langle U, \left((\bar{U}\cdot U)U + (U\cdot\bar{U})U + (U\cdot U)\bar{U}\right)\right\rangle. \tag{3.71}$$

Unter Benutzung der Formeln für a und b sowie der Definition

$$n_2(\omega_1) := \frac{k_1'\hat{\chi}_3^{(3)}(\omega_1)\left\langle U, (\bar{U}\cdot U)U + (U\cdot\bar{U})U + (U\cdot U)\bar{U}\right\rangle}{2\left\langle U, n(\omega_1)\left(\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c}\right)' U\right\rangle} \tag{3.72}$$

folgt dann direkt (3.68).

Über das Vorzeichen von ν gibt nun folgender Satz Auskunft:

Satz 3.2.5. ($\nu > 0$)

Gilt $\chi^{(3)} > 0$, so ist der Parameter ν positiv.

Die Bedingung $\chi^{(3)} > 0$ ist durch die Annahme gesichert, daß der Faser verlustfrei ist.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß $a :=< U, \partial L_1/\partial k_1 U >$ nach Abschnitt 2.2 negativ ist. Wir müssen also noch beweisen, daß b ebenfalls negativ ist. Aufgrund der Bemerkung ist

$$b = -\langle U, F(U)\rangle = \frac{\omega_1^2}{c^2}\hat{\chi}_3^{(3)}\left(\left\langle U, (\bar{U}\cdot U)U\right\rangle + \left\langle U, (U\cdot\bar{U})U\right\rangle + \left\langle U, (U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\right). \tag{3.73}$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Skalarprodukte. Für den ersten gilt:

$$\left\langle U, (\bar{U}\cdot U)U\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}(|U_1|^2 + |U_2|^2 + |U_3|^2)^2\, dx_\perp > 0. \tag{3.74}$$

Analog folgt die gleiche Formel für den zweiten Summanden. Der dritte Summand vereinfacht sich dann wie folgt:

$$\left\langle U, (U\cdot U)\bar{U}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}|U_1^2 + U_2^2 + U_3^2|^2\, dx_\perp > 0 \tag{3.75}$$

Nun benutzen wir die Tatsache, daß $\hat{\chi}_3^{(3)}$ positiv ist und daher folgt $\nu > 0$. □

Erfüllt nun A_1 die NLS, so gilt

$$L_1 E_1^{(3)} = -i\frac{dL}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2} - \left(\nu\frac{\partial L}{\partial k_1}U + F(U)\right)|A_1|^2 A_1 \tag{3.76}$$

Aufgrund der Nichtlinearität läßt sich die allgemeine Lösung nicht ohne weiteres explizit angeben, und im nächsten Schritt gelangt man nur durch Ausnutzen dieser Gleichung zum Ziel.

Bemerkung 3.2.6. *Hiermit wurde nun eine erste Näherung für das elektrische Feld gefunden: Ist U Eigenmode und erfüllt A_1 die NLS, so gilt:*

$$E(x_\perp, z, t) = \epsilon A_1(\xi, \tau) U(x_\perp) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + \epsilon \bar{A}_1(\xi, \tau) \bar{U}(x_\perp) e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} + O(\epsilon^2) \tag{3.77}$$

Die Ordnung ϵ^4:

Um die nächsthöhere Ordnung zu untersuchen, muß zunächst $\tilde{L_l}'''$ berechnet werden. Es gilt

Lemma 3.2.7 (Berechnung von $\tilde{L_1}'''$).

$$\tilde{L_1}'''(0) = -i\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial L_1}{\partial k_1} k_1''' \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 6i\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

Den Beweis findet man in Anhang B.2. Mit Hilfe des Lemmas lautet die Gleichung in der Ordnung ϵ^4 für $l = 1$:

$$\begin{aligned}
& L_1 E_1^{(4)} \\
=& -\tilde{L_1}'(0)E_1^{(3)} - \frac{1}{2}\tilde{L_1}''(0)E_1^{(2)} - \frac{1}{6}\tilde{L_1}'''(0)E_1^{(1)} - NL \\
=& -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} \\
& + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} \\
& + \frac{i}{6}\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3} - \frac{i}{6}\frac{\partial L_1}{\partial k_1}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3} - i\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2} - i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi}\right) - NL \\
=& -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3} \\
& + \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\left(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}\right) + i\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2}\right) - NL
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Nun muß noch die Nichtlinearität NL in der Ordnung ϵ^4 berechnet werden. Es gilt

$$N\left(\omega_{l_1} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_1}}, \omega_{l_2} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_2}}, \omega_{l_3} + i\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_{l_3}}\right) = N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3}) + i\epsilon\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N}{\partial\omega_{l_k}}(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial\tau_{l_k}} + O(\epsilon^2)$$

Demnach wird der nichtlineare Term NL in der Ordnung ϵ^4 zu

$$\sum_{l_1+l_2+l_3=l}\left[\sum_{i+j+k=4}\left(N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)} \cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)}\right) + i\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N}{\partial\omega_{l_k}}(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial\tau_{l_k}}(E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)}\right] \tag{3.79}$$

Zur Anwendung der Fredholmalternative werden die Terme einzeln untersucht und vereinfacht. Wie bereits im letzten Abschnitt angekündigt, gestaltet sich dies aufwendiger, da $E_1^{(3)}$ nicht explizit bekannt ist und in der Bestimmungsgleichung erstmals die Nichtlinearität auftaucht.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 =& \left\langle U, L_1 E_1^{(4)} \right\rangle \\
=& \left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \right\rangle \\
&+ \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3}) \right\rangle \\
&+ i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial \tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}) \right\rangle \\
&- \sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{i+j+k=4}\left\langle U, N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)} \cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)} \right\rangle \\
&- i\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{k=1}^{3}\left\langle U, \frac{\partial N}{\partial \omega_{l_k}}(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial \tau_{l_k}}(E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun:

Satz 3.2.8 (Kompatibilitätsbedingung in der Ordnung in der Ordnung ϵ^4).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\langle U, L_1 E_1^{(4)} \right\rangle \\
=& \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U \right\rangle \left(i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} + i\frac{\partial \nu}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) \right) \\
&- 2|A_1|^2 A_2 \langle U, F(U) \rangle - A_1^2 \bar{A}_2 \langle U, F(U) \rangle + i\langle U, G(U) \rangle A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau},
\end{aligned}$$

wobei die folgenden Definitionen gelten sollen:

$$\begin{aligned}
G(U) :=& \frac{d}{d\omega_1}(F(U)) + N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}})U + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}} \\
&- N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U - N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U} \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

$$N_{-\mathrm{i}11} := \frac{\partial}{\partial \omega_1}N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1) \quad \textit{usw.} \qquad (3.81)$$

Bemerkung 3.2.9. *Der Beweis dieses Satzes ist sehr rechenaufwendig und wird in Anhang B erfolgen. Um den ersten Summanden*

$$\left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \right\rangle \qquad (3.82)$$

zu vereinfachen, verfährt man analog zum Beweis von Satz 3.2.1. Hier wird dieser Term allerdings nicht wegfallen, da in der Gleichung für $E_1^{(3)}$ auch nichtlineare Glieder auftauchen.

Aufgrund von Satz 3.2.8 muß A_2 nun die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned}0 =& i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} \\ &+ i\frac{\partial \nu}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) + 2\nu |A_1|^2 A_2 + \nu A_1^2 \bar{A}_2 + i\mu A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau},\end{aligned} \tag{3.83}$$

Dabei ist

$$\mu := \frac{\left\langle U, G(U)\right\rangle}{\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle}. \tag{3.84}$$

Bemerkung 3.2.10. *Hiermit ist nun eine weitere Näherung für das elektrische Feld bekannt: Erfüllt A_1 die NLS und ist A_2 Lösung von (3.83), so ist*

$$\begin{aligned}E(x_\perp, z, t) =& \epsilon A_1(\xi,\tau)U(x_\perp,\omega_1) + i\epsilon^2\frac{\partial A_1}{\partial \tau}(\xi,\tau)\frac{dU}{d\omega_1}(x_\perp,\omega_1) + \epsilon^2 A_2(\xi,\tau)U(x_\perp,\omega_1) \\ &+ (c.c) + O(\epsilon^3) \\ =& \epsilon U(x_\perp, \omega_1 + i\epsilon\frac{\partial}{\partial \tau})A_1(\xi,\tau) + \epsilon^2 A_2(\xi,\tau)U(x_\perp,\omega_1) + (c.c) + O(\epsilon^3),\end{aligned}$$

wobei (c.c) für das komplex Konjugierte des ersten Ausdrucks steht.

Will man die Phänomene höherer Ordnung untersuchen, so erscheint die gefundene Gleichung unpraktisch, da in der Gleichung für A_2 die Lösung A_1 der NLS auftaucht. Um dies zu umgehen, betrachtet man die Projektion des elektrischen Feldes auf den Raum, der von U aufgespannt wird, nämlich $p(E) = \langle U, E\rangle$. Wir wollen nun annehmen, daß $dU/d\omega_1$ nicht in dem von U aufgespannten Nullraum von L_1 liegt. In diesem Fall gilt $dU/d\omega_1 \perp U$ sowie $\langle U, E\rangle = \epsilon A_1 \langle U, U\rangle + \epsilon^2 A_2 \langle U, U\rangle$, und die Größe $A := \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2$ ist von Interesse. Aus den Gleichungen für A_1 und A_2 erhält man

Satz 3.2.11.

Die Funktion $A := \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2$ genügt

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{\nu}{\epsilon^2}|A|^2 A - \epsilon\frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + i\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \nu}{\partial \omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A|^2 A) + i\frac{\mu}{\epsilon}A\frac{\partial |A|^2}{\partial \tau} = O(\epsilon^3) \tag{3.85}$$

Beweis. Es ist bekannt, daß A_1 und A_2 die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}0 =& i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} \\ &+ i\frac{\partial \nu}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) + 2\nu |A_1|^2 A_2 + \nu A_1^2 \bar{A}_2 + i\mu A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau} \\ 0 =& i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu|A_1|2A_1\end{aligned}$$

Wie erinnern an die Definition $A = \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2$ und berechnen

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = \epsilon^2 \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} - i\epsilon^2 \frac{\partial \nu}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1)$$
$$- 2\epsilon^2 \nu |A_1|^2 A_2 - \epsilon^2 \nu A_1^2 \bar{A}_2 - i\epsilon^2 \mu A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau} - \epsilon \nu |A_1|^2 A_1.$$

Jetzt wenden wir uns den einzelnen Summanden zu. Für den ersten gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} &= \epsilon \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} - \epsilon^3 \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_2}{\partial \tau^3} \\ &= \epsilon \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Um die weiteren Summanden zu vereinfachen, betrachten wir zunächst

$$|A|^2 A = \epsilon^3 |A_1|^2 A_1 + 2\epsilon^4 |A_1|^2 A_2 + \epsilon^5 \bar{A}_1 A_2^2 + \epsilon^4 A_1^2 \bar{A}_2 + 2\epsilon^5 |A_2|^2 A_1 + \epsilon^6 |A_2|^2 A_2.$$

Demnach ist

$$-2\epsilon^2 \nu |A_1|^2 A_2 - \epsilon^2 \nu A_1^2 \bar{A}_2 - \epsilon \nu |A_1|^2 A_1 = -\frac{\nu}{\epsilon^2}|A|^2 A + O(\epsilon^3).$$

Mit den restlichen Termen verfährt man analog und erhält die Behauptung. □

Setzen wir nun

$$q(\tau, \xi) := \frac{1}{\epsilon}A(\tau, \xi) = A_1(\tau, \xi) + \epsilon A_2(\tau, \xi),$$

so erhält man

Satz 3.2.12. (Die Nichtlineare Schrödingergleichung höherer Ordnung)
Die Funktion $q(\tau, \xi)$ genügt

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + \nu |q|^2 q + \epsilon \left(-\frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} + i\frac{\partial \nu}{\partial \omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(|q|^2 q) + i\mu q \frac{\partial |q|^2}{\partial \tau} \right) = O(\epsilon^2).$$

Durch die Betrachtung der Ordnung ϵ^4 haben wir also die Nichtlineare Schrödingergleichung höherer Ordnung (HNLS) gefunden. Setzen wir in der HNLS $\epsilon = 0$, so erkennen wir, daß $q = A_1$ der NLS genügt. Aus diesem Grund ist die HNLS als das Hauptresultat dieses Abschnitts anzusehen. Die HNLS wurde direkt aus den Basisgleichungen, nämlich den Maxwellschen Gleichungen in einem Dielektrikum, hergeleitet; sie ist Voraussetzung für jede weitere mathematische Betrachtung im Bereich der Faseroptik.

4. Solitonen als Lösung der NLS

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß die Impulsausbreitung in einer Faser durch die NLS bzw. HNLS beschrieben werden kann. In diesem Kapitel werden einige Aussagen über die Lösungen in Form von Solitonen zusammengefaßt. Insbesondere soll hier der Unterschied zwischen hellen und dunklen Solitonen verdeutlicht werden. Dabei zeigt sich, daß helle Solitonen für die Signalübermittlung besser geeignet scheinen.

Um uns jetzt mit den Lösungen der NLS

$$i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu \left|A_1\right|^2 A_1 = 0, \quad \nu > 0 \tag{4.1}$$

zu beschäftigen, werden wir sie zunächst auf eine Standardform transformieren. Dazu führen wir folgende Substitutionen durch:

$$T := \frac{\tau}{\tau_0}, \quad Z := \frac{\xi}{Z_{dis}}, \quad q(T,Z) = \frac{A_1(\tau,\xi)}{\sqrt{P_0}}. \tag{4.2}$$

Die Variablen sind hierbei auf charakteristische Größen normiert worden: τ_0 sei die Impulsweite, $Z_{dis} = \tau_0^2/|k_1''|$ die Dispersionslänge und P_0 die Energie des Impulses zu Beginn und $Z_{NL} = 1/\nu P_0$ ein Maß der Nichtlinearität. Im Fall $k_1'' > 0$ spricht man dabei von normaler, für $k_1'' < 0$ von anomaler Gruppengeschwindigkeitsdispersion.
Es ergibt sich

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} - \operatorname{sgn}(k_1'')\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \frac{Z_{dis}}{Z_{NL}}\left|q\right|^2 q = 0. \tag{4.3}$$

Bekanntermaßen läßt sich diese normierte NLS für Anfangsdaten, die für $T \to \infty$ schnell genug abfallen, mit Hilfe der „Inverse Scattering"-Methode lösen (vgl. dazu [6, 11]). Die NLS ist eine der wenigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die analytisch gelöst werden können. Ihre Lösungen sind Solitonen, sie sind stabil unter kleinen Störungen und robust gegen Kollisionen mit anderen Solitonen. Man teilt die Lösungen der NLS in zwei Klassen: Im Fall $k_1'' < 0$ spricht man von „hellen", für $k_1'' > 0$ von „dunklen" Solitonen. Desweiteren bestimmt der Parameter $N := Z_{dis}/Z_{NL}$ die Ordnung der Solitone, er gibt das Verhältnis zwischen Nichtlinearität und Dispersion an. Für $N > 1$ erhält die Solitone nach einer gewissen Distanz ihre Form zurück, im Fall $N = 1$ bleibt die Gestalt erhalten. Die zugehörige Solitone wird die „Fundamentalsolitone" genannt, Dispersion und Effekte der Nichtlinearität heben sich hier auf. Es sei noch bemerkt, daß sich auch eine normierte Form der HNLS mit Hilfe der „Inverse Scattering"-Methode lösen läßt; die Lösungen sind ebenfalls Solitonen [11].

4.1. Helle Solitonen

In diesem Abschnitt wollen wir annehmen, daß wir uns im Bereich anomaler Gruppengeschwindigkeitsdispersion ($k_1'' < 0$) befinden und explizit die Fundamentalsolitone bestimmen. Dies geschieht nicht mit Hilfe der „Inverse Scattering"-Methode; allerdings verwenden wir die Tatsache, daß die Amplitude der Fundamentalsolitone stationär in Z ist. Dabei richten wir uns an die Darstellung in [11].

Sei nun also $k_1'' < 0$ und $N = 1$; wir wollen nach einer Lösung q der NLS

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = 0 \tag{4.4}$$

mit $|q(Z,T)|^2 = f(T)$, also in Z konstanter Amplitude, suchen. Dabei sei $f(T)$ eine reellwertige Funktion, die nur von T abhängt. Durch Zerlegung von q in Polarkoordinaten erhalten wir

$$q(T,Z) = f(T)e^{i\phi(T,Z)} \tag{4.5}$$

mit reeller Phase ϕ. Dies setzen wir in (4.4) ein und erhalten zwei Gleichungen durch Vergleich des Real- bzw. Imaginärteils:

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)^2 = \frac{1}{f(T)}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} + f^3(T)\right) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(f^2(T)\frac{\partial \phi}{\partial T}\right) = 0 \tag{4.7}$$

Wir erkennen, daß die rechte Seite von (4.6) unabhängig von Z ist. Aus (4.7) läßt sich

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{1}{f^2(T)}C(Z) \tag{4.8}$$

mit einer in T konstanten Funktion $C(Z)$ folgern. Durch zweimaliges Differenzieren nach Z erhalten wir

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial T \partial Z^2} = \frac{1}{f^2(T)}\frac{\partial^2 C}{\partial Z^2}, \tag{4.9}$$

und aus (4.6) in Verbindung mit (4.8) folgt

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial T \partial Z^2} = 4C\frac{\partial C}{\partial Z}\frac{1}{f^5}\frac{\partial f}{\partial T}. \tag{4.10}$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich dann

$$\frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} = 4C\frac{\partial C}{\partial Z}\frac{1}{f^3}\frac{\partial f}{\partial T} \text{ bzw. } \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2}\Big/ 4C\frac{\partial C}{\partial Z} = \frac{1}{f^3}\frac{\partial f}{\partial T}. \tag{4.11}$$

In der letzten Gleichung erkennen wir, daß die linke Seite nur von Z abhängig ist, die rechte nur von T. Demnach müßten beide Seiten konstant in T und Z sein, was $\partial f/\partial T = Cf^3$ und somit das Divergieren der Amplitude implizieren würde. Folglich war die Division durch $\partial C/\partial Z$ unzulässig und C muß konstant sein. Wir können nun $C(z) = C_0$ in (4.8) einsetzen und erhalten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{C_0}{f^2(T)} \tag{4.12}$$

An dieser Gleichung erkennt man, daß $\partial\phi/\partial T$ nur von T abhängt. Mit (4.6) folgt dies dann auch für $\partial\phi/\partial Z$. Integration liefert nun

$$\phi = \int \frac{C_0}{f^2(T)}\, dT + A(Z). \tag{4.13}$$

Differentiation nach Z zeigt uns, daß $\partial A/\partial Z$ unabhängig von Z sein muß, was $A(z) = \Omega Z + \sigma_0$ impliziert. Jetzt können wir $\partial\phi/\partial Z = \Omega Z$ sowie $\partial\phi/\partial T = C_0/f^2$ in (4.6) einsetzen, es ergibt sich folgende gewöhnliche Differentialgleichung für f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = -2f^3 + 2\Omega f + \frac{C_0^2}{f^3} = -\frac{\partial}{\partial f} V(f), \tag{4.14}$$

wobei $V(f)$ gegeben ist durch

$$V(f) = -\Omega f^2 + \frac{1}{2} f^4 + \frac{C_0^2}{2f^2}. \tag{4.15}$$

Multiplikation mit $\partial f/\partial T$ und Integration über T führt jetzt auf

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) + V(f) = E_0 \tag{4.16}$$

mit einer Integrationskonstante E_0. Im Fall $E_0 = 0$, $C_0 = 0$ und $\Omega > 0$ liefert die Betrachtung des Phasenportraits eine in T schnell abklingende Lösung. In diesem Fall gelangen wir mit $f = \sqrt{\rho}$ zu

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2 = -f\rho^2(\rho - \eta^2). \tag{4.17}$$

Dabei ist $\Omega = \eta^2/2$ gesetzt worden. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Lösung wohlbekannt:

$$\rho(T) = \eta^2 \mathrm{sech}^2(\eta(T - T_0)). \tag{4.18}$$

Dabei ist T_0 eine Konstante; sie beschreibt das Zentrum des schnell abklingenden Impulses. An der hyperbolischen sech-Funktion erkennen wir die Struktur der Lösung. Wie gewünscht hat sie die Form eines lokalen Impulses.

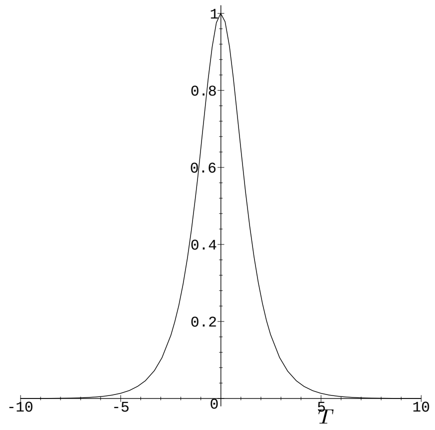


Abbildung 4.1.: Die sech-Funktion

Für $C_0 = 0$ und $\Omega = \eta^2/2$ erhalten wir aus (4.13) eine Lösung der NLS als

$$q(T, Z) = \eta \ \mathrm{sech}(\eta(T - T_0)) \exp\left(i\frac{\eta^2}{2}Z + i\sigma_0\right). \tag{4.19}$$

Aufgrund von Invarianzen der NLS können wir daraus eine allgemeine Lösung als

$$q(T, Z) = \eta \ \mathrm{sech}(\eta(T + \kappa Z - T_0)) \exp\left(-i\kappa T + \frac{i}{2}(\eta^2 - \kappa^2)Z + i\sigma_0\right) \tag{4.20}$$

bestimmen. Die einzelnen Parameter müssen an die gegebenen Anfangsdaten $q(T, 0)$, dh. das Eingangssignal, angepaßt werden. Im einzelnen entspricht dabei η der Amplitude, T_0 dem Zeitpunkt des Impulses, κ der Geschwindigkeit und σ_0 der Phase des Eingangsimpulses.

Bemerkung 4.1.1. *Wenn wir Anfangsdaten $q(T, 0) = \exp(i\xi/2)$ vorgeben, erhalten wir*

$$q(T, Z) = \eta \ sech(\eta T) \exp(i\xi/2). \tag{4.21}$$

Dies ist die einfachste Form der Solitone, ihre Amplitude ändert sich während der Ausbreitung in der Faser nicht, die Phase ändert sich linear mit der Ausbreitungsdistanz und ist zeitunabhängig.

Die wichtigste Eigenschaft der Solitonen ist, daß ihre Amplitude und Geschwindigkeit bei der Ausbreitung in der Faser erhalten bleiben. Dies ist als eine Balance zwischen Dispersion und den Effekten der Nichtlinearität zu sehen und der Grund, warum optische Übertragungssysteme, die auf Solitonen basieren, derart leistungsstark sind.

4.2. Dunkle Solitonen

Auch im Fall normaler Dispersion läßt sich die NLS mit Hilfe der „Inverse Scattering"-Methode lösen. Die zugehörigen Lösungen sind qualitativ vollkommen anders geartet und werden dunkle Solitonen genannt.

Sei in diesem Abschnitt also $k_1'' > 0$, die auf Standardform transformierte NLS lautet dann

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} - \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \frac{Z_{dis}}{Z_{NL}} |q|^2 q = 0. \tag{4.22}$$

Für $N = Z_{dis}/Z_{NL} = 1$ läßt sich das Verfahren des letzten Abschnitts ebenfalls anwenden. Damit finden wir für die von Z unabhängig angenommene Amplitude

$$f^2(T) = \eta \left(1 - a^2 \operatorname{sech}^2(\eta a(T - T_0))\right) \tag{4.23}$$

mit $a^2 = 1 - \rho_0/\eta^2$.
Wir wollen uns jetzt nicht mit den konkreten Eigenschaften dieser Lösungen beschäftigen, sondern den Unterschied zu den hellen Solitonen verdeutlichen. Für $a = 1$, d.h. $\rho_0 = \eta^2$, gilt

$$|q(Z,T)|^2 = \left(1 - \operatorname{sech}^2(\eta(T - T_0))\right). \tag{4.24}$$

Die Amplitude für $T_0 = 0$ ist in folgendem Diagramm aufgetragen:

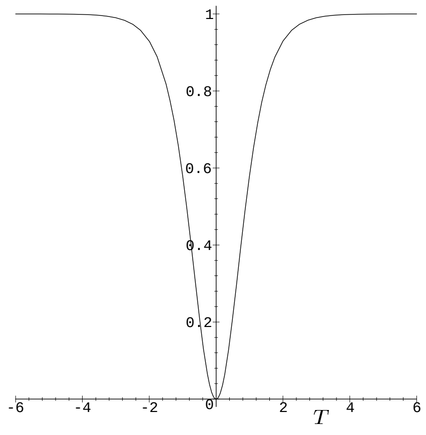


Abbildung 4.2.: Dunkle Solitone

Wir erkennen folgenden Unterschied zu den hellen Solitonen: Hier verharrt die Amplitude bis auf ein kurzes Zurückkehren zur 0 auf einem positiven Wert. Darin liegt der Grund für die Bezeichnung dunkle Solitonen: Dort, wo bei den hellen Solitonen die Intensität maximal war, ist sie nun minimal.

Der Parameter a gibt den Grad der Dunkelheit an. Man kann zeigen, daß für $a < 1$ die Amplitude nicht ganz verschwindet. Daher wird die Solitone mit $a = 1$ auch schwarze Solitone genannt, für $a < 1$ spricht man von grauen Solitonen.

Natürlich ist es vorstellbar, auch dunkle Solitonen für optische Übertragungssysteme zu nutzen. Eine 1 würde dann dem negativen Ausschlag der Amplitude entsprechen. Aufgrund der höheren Energie, die dafür aufgewendet werden muß, werden sie derzeit als weniger geeignet angesehen. Ein Vorteil ist jedoch, daß sie durch den Verlust in der Faser weniger betroffen sind, so daß sich der Abstand der Verstärker (vgl. Kapitel 5) vergrößern läßt. Daher befaßt sich die Forschung derzeit auch verstärkt mit optischen Übertragungssystemen, die auf dunklen Solitonen basieren. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns allerdings nur mit den hellen Solitonen beschäftigen, da diese in der Praxis bisher nahezu ausschließlich verwendet werden.

5. Modifikationen der NLS

In diesem Kapitel wollen wir nun die NLS an die Gegebenheiten der Praxis anpassen. Dazu beziehen wir zunächst den Verlust in der Faser mit ein, der durch Verstärker kompensiert werden soll. Es wird sich zeigen, daß sich damit die Gleichung formal auf den verlustfreien Fall zurückführen läßt. In einem nächsten Schritt wird der Abstand der Verstärker erhöht. Um die damit verbundenen Probleme zu kompensieren, setzt man Faserstücke unterschiedlicher Dispersion hintereinander, dies wird Dispersionsmanagement genannt. Es wird sich zeigen, daß die Impulsausbreitung in diesem Fall durch die NLS mit zusätzlichem parabolischen Potential beschrieben werden kann. Durch den Einsatz der Verstärker taucht jedoch ein neues Problem auf, das in der Literatur mit „Gordon-Haus jitter“ bezeichnet wird. Eine Möglichkeit, den Einfluß dieses Effektes zu verringern, ist der Einsatz von Phasenmodulatoren. In diesem Fall ist die beschreibende Gleichung die NLS mit zusätzlichem periodischen Potential, die im letzten Abschnitt dieses Kapitels hergeleitet wird.

Bevor wir nun die Gleichungen modifizieren, werden die bisherigen Ergebnisse kurz zusammengefaßt:

In Kapitel 3 wurde aus den Maxwellschen Gleichungen die Gleichung hergeleitet, die die Ausbreitung der langsam variierenden Amplitude des elektrischen Feldes beschreibt. Sie schreibt sich in erster Näherung als

$$i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu \left|A_1\right|^2 A_1 = 0 \text{ mit } \nu > 0. \tag{5.1}$$

Im Fall $k_1'' > 0$ spricht man von normaler, für $k_1'' < 0$ von anomaler Gruppengeschwindigkeitsdispersion. In der Literatur wird auch oft die Bezeichnung $\beta_2 = k_1''$ verwendet. Im Wellenlängenbereich von $\lambda = 1.55$-μm, dem in der Praxis bedeutendsten, sind folgende Werte für die Parameter typisch: $k_1'' = -1ps^2/\text{km}$ und $\nu = 1W^{-1}/\text{km}$. [13]

Eine weitere Näherung wurde gefunden als

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + \nu \left|q\right|^2 q = i\epsilon\left(\frac{1}{6}k_1'''\frac{\partial^3 q}{\partial \tau^3} - \frac{\partial \nu}{\partial \omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(\left|q\right|^2 q) - \mu q\frac{\partial \left|q\right|^2}{\partial \tau}\right). \tag{5.2}$$

Hier bezeichnet man den Faktor k_1''' als Dispersion dritter Ordnung (TOD). Diese HNLS soll jedoch nicht näher untersucht werden, da andere Phänome (wie der Verlust) einen wesentlich höheren Einfluß auf die Gestalt der Lösung haben.

Es sei an die Unterscheidung zwischen hellen ($k_1'' < 0$) und dunklen Solitonen ($k_1'' > 0$) aus Kapitel 4 erinnert. Im folgenden werden wir uns, sofern das Vorzeichen von k_1'' eine Rolle spielt, immer mit den hellen Solitonen beschäftigen.

5.1. Verlust in der Faser

In diesem Abschnitt wird der Verlust in der Faser mit einbezogen. Es gelte also

$$\mathrm{Im}(n(\omega)) \neq 0. \tag{5.3}$$

Dies wurde nicht in die Herleitung einbezogen, da der Operator L dann nicht selbstadjungiert gewesen wäre. Wir nehmen nun an, daß diese Effekte von der Ordnung ϵ^2 sind, genauer

$$\mathrm{Im}(\hat{\chi}^{(1)}(\omega)) = O(\epsilon^2). \tag{5.4}$$

und erinnern daran, daß das elektrische Feld von der Ordnung ϵ ist. Demnach lautet die modifizierte Gleichung in der Ordnung ϵ^3

$$\begin{aligned} L_1 E_l^{(3)} = & -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \left[i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} \right] - F(U)\left|A_1\right|^2 A_1 \\ & + i\frac{\omega_1^2}{c^2}\mathrm{Im}(\hat{\chi}^{(1)}(\omega_1)) A_1 U. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Anwendung der Fredholmalternative liefert dann die modifizierte NLS, in der ein Verlustterm enthalten ist:

$$i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} + \nu \left|A_1\right|^2 A_1 = -i\gamma A_1, \text{ wobei } \gamma := \frac{\omega_1^2}{c^2}\frac{\left\langle U, \mathrm{Im}(\hat{\chi}^{(1)})(\omega_1) U \right\rangle}{\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \right\rangle}. \tag{5.6}$$

Bezeichnet nun A_V die Lösung von (5.6), so gilt unter Vernachlässigung der Nichtlinearität ($\nu = 0$)

$$A_V(\xi, \tau) = e^{-\gamma \xi} A_1(\xi, \tau). \tag{5.7}$$

An dieser Lösung können wir den Einfluß des Verlustes erkennen: Die Amplitude klingt bei der Ausbreitung in der Faser exponentiell ab.

In der Literatur wird auch oft $\gamma = n_I(\omega_1)\omega_1/c$ gesetzt, wobei n_I in Anlehnung an die Definition von n_2 des letzten Abschnitts definiert wird.

Bemerkung 5.1.1. *Die Effekte höherer Ordnung, die von $Im(\hat{\chi}_3)$ stammen, wollen wir weiterhin vernachlässigen, also annehmen, daß auch sie von der Ordnung ϵ^2 oder kleiner sind. Da die Nichtlinearität von der Gestalt $\hat{\chi}_3(E \cdot E)E$ ist, tauchen diese Effekte erst in der Ordnung ϵ^5 auf, die hier nicht betrachtet wurde.*

Selbstverständlich wird auch die Gestalt der NLS höherer Ordnung durch die Einbeziehung des Verlustes beeinflußt. Dies soll hier nicht näher betrachtet werden.

Bemerkung 5.1.2. *Ein weiteres wichtiges Phänomen ist die Interaktion zwischen Impulsen. Dies führt auf gekoppelte Schrödingergleichungen, die jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein sollen. Daher wird dieses Problem hier vernachlässigt.*

5.2. Einsatz von Verstärkern

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Kompensation des Verlustes durch Verstärker, dies geschieht in Anlehnung an Kapitel 5.1.1 im Buch von Mecozzi et al. [14]. Wir betrachten also die Gleichung (5.6).

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu \left|A\right|^2 A = -i\gamma A. \tag{5.8}$$

Um den Verlust zu kompensieren, werden nun an festen Stellen $\xi_k = kL_A$ $(k = 1 \dots n)$ Verstärker eingesetzt. Dabei haben wir angenommen, daß die Verstärker äquidistant mit Abstand L_A in die Faser eingesetzt wurden. Weiter nehmen wir an, daß die Länge l des Verstärkers wesentlich kleiner als der Abstand zweier Verstärker L_A ist. Demnach stellen wir uns jeden Verstärker als in einem Punkt konzentriert vor. Mathematisch läßt sich die Aktion eines Verstärkers dann gemäß

$$A_{out} = e^g A_{in} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial A}{\partial \xi} = g\delta(\xi - \xi_k)A$$

beschreiben. Dies wird in der modifizierten NLS (5.6) in folgender Form berücksichtigt:

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu \left|A\right|^2 A = i(-\gamma + g\sum_{k=1}^{n}\delta(\xi - \xi_k))A =: iG(z)A. \tag{5.9}$$

Es gilt also

$$G(\xi) = -\gamma \text{ für } 0 \leq \xi < L_A. \tag{5.10}$$

Aufgrund der Gestalt von G wird A stark oszillieren. Um dies zu umgehen, wird folgende Transformation eingeführt:

$$A(\xi, \tau) = F(\xi)Q(\xi, \tau), \tag{5.11}$$

wobei F Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = G(\xi)F, \quad F(0) = 1 \tag{5.12}$$

sein soll. Wir erkennen

$$F(\xi) = \exp(\int_0^\xi G(z)\,dz) = \begin{cases} e^{-\gamma\xi} & : 0 < \xi < L_A \\ e^g e^{-\gamma L_A} & \xi = L_A + 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Demnach gilt $F(\xi) < 1$ für $\xi < L_A$, F spiegelt also den Verlust wider. Um diesen zu kompensieren, setzen wir $g := \gamma L_A$, so daß $F(L_A{+}0) = 1$ gilt. Dabei bezeichne $F(L_A{+}0)$ den Wert von F am Ausgang des Verstärkers.

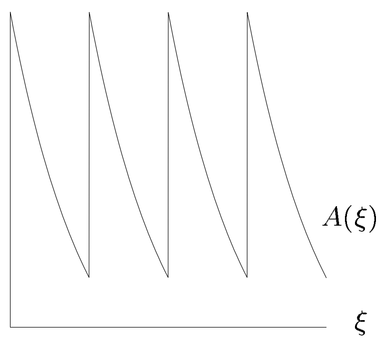


Abbildung 5.1.: Wirkung der Verstärker

Bemerkung 5.2.1. *Im Buch von Hasegawa [11] findet man an dieser Stelle eine Approximation der Funktion F, indem $exp(g)$ durch die ersten beiden Summanden seiner Taylorreihe ersetzt wird. In diesem Fall erhält man für den Gewinn, der zur Kompensation nötig ist, $g = exp(\gamma L_A) - 1$. Allerdings bleibt der Sinn dieses Verfahrens verborgen. In der Literatur wird jedoch größtenteils dieser Ausdruck für den Gewinn verwendet.*

Aufgrund von (5.11) erhalten wir dann folgende Gleichung für Q:

$$i\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + \nu |F(\xi)|^2 |Q|^2 Q = 0. \tag{5.14}$$

Die Verlustfunktion F ist eine periodische, unstetige Funktion mit Periode L_A. Für $0 \leq \xi < L_A$ gilt

$$|F(\xi)|^2 = \exp(-2\gamma\xi). \tag{5.15}$$

Diese Funktion läßt sich in eine Fourierreihe entwickeln. Es gilt

$$|F(\xi)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\frac{2\pi}{L_A}\xi) f_n, \tag{5.16}$$

wobei

$$f_n = \frac{1 - \exp(-2\gamma L_A)}{2\gamma L_A + in2\pi}. \tag{5.17}$$

Nun wollen wir Gleichung (5.14) über die Periode L_A mitteln.

Bemerkung 5.2.2. *Wir fassen* (5.14) *als Differentialgleichung in ξ auf. Dann handelt es sich um eine Gleichung mit stark oszillierenden Teilen vom Typ $\dot{x} = f(t/\epsilon, x, \epsilon)$, wobei wir $\partial Q/\partial \xi$ mit $\dot{x}$ identifizieren wollen. Durch die Substitution $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ transformiert sie sich zu $\partial x/\partial \tau = \epsilon f(\tau, x, \epsilon)$. Auf diese Form ist nun das Standardmittelungsverfahren anwendbar (vgl. dazu Abschnitt 4.1 in Guckenheimer und Holmes [15]). Wir nehmen dabei den Parameter L_A als klein an, was vertretbar ist, da der Abstand zweier Verstärker im Vergleich zur Länge der Faser klein ist. In der Praxis gilt $L_A \sim 20$ km.*

Durch Mittelung über die Periode L_A ergibt sich nun

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu < |F|^2 > |Q_0|^2 Q_0 = 0 \tag{5.18}$$

mit $Q_0 \sim Q$. Wir haben dabei

$$< f >= \frac{1}{L_A}\int_0^{L_A} f(\xi) d\xi \tag{5.19}$$

als den Mittelwert von f über die Perode L_A definiert. Aufgrund der Darstellung von $|F|^2$ als Fourierreihe berechnet sich dies wegen

$$\int_0^{L_A} \exp(in\frac{2\pi}{L_A}\xi)dz = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 0 \tag{5.20}$$

leicht zu

$$< |F|^2 >= \frac{1}{L_A}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{L_A} \exp(in\frac{2\pi}{L_A})\xi dz f_n = f_0 \tag{5.21}$$

Demzufolge schreibt sich die Gleichung für Q_0 als

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma |Q_0|^2 Q_0 = 0 \tag{5.22}$$

mit

$$\sigma := \frac{1 - \exp(-2\gamma L_A)}{2\gamma L_A}. \tag{5.23}$$

Formal unterscheidet sich diese Gleichung nicht mehr von der NLS in einer verlustfreien Faser mit einem skalierten nichtlinearen Koeffizienten, der für die Änderung der Energie entlang der Faser steht. Daher wird dies auch das verlustfreie Modell genannt. Es ist eine gute Beschreibung der Realität, falls die Verstärker so dicht gesetzt sind, daß die Variation der Dispersion zwischen zwei Verstärkern vernachlässigt werden kann. Wir erinnern daran, daß Q nicht das Originalfeld war. Da $F(\xi)$ periodisch mit Periode L_A war und $F(0) = 1$, gilt $F(nL_A) = 1$, und demzufolge ist am Ausgang eines Verstärkers $A = Q$.

Bemerkung 5.2.3. *In der Literatur wird oft $G := exp(2\gamma L_A)$ gesetzt, G wird Gewinnparameter genannt. Setzen wir noch $E(T, Z) = Q_0(\tau, \xi)$, so lautet die modifizierte Gleichung*

$$i\frac{\partial E}{\partial Z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} + \nu\eta |E|^2 E = 0, \tag{5.24}$$

wobei $\eta := (G - 1)/(Gln\ G)$ und die Notation $\beta_2 = k_1''$ benutzt wurden.

5.3. Dispersionsmanagement

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Dispersionsmanagement. Dies ist eine Technik, die dazu dient, den Abstand Z_A der Verstärker zu erhöhen und auf diese Art die Übertragungssysteme effizienter zu machen. Falls Z_{dis} (ein Wert, der angibt, ab wann die Dispersion eine Rolle spielt) von der gleichen Größenordnung wie Z_A ist, sind die Verstärker nicht mehr in der Lage, die Störung des Eingangsimpulses aufgrund der Dispersion zu kompensieren. Daher setzt man zwischen zwei Verstärkern Faserkomponenten mit normaler bzw. anomaler Dispersion hintereinander, um so die Störungen auszugleichen. Dieses Verfahren wird Dispersionsmanagement genannt. Unterscheiden sich die Dispersionen stark, so spricht man von starkem Dispersionsmanagement (SDM). Wir werden erkennen, daß die Signalausbreitung in diesem Fall durch die NLS mit einem zusätzlichen quadratischen Potential beschrieben wird.

Mit dem Dispersionsmanagement befassen sich eine Reihe Artikel von Turitsyn (insbesondere [17, 18, 19, 20]). Wir folgen nun der Darstellung in [20] und schreiben (5.9) in folgender Form

$$i\frac{\partial E}{\partial Z} - \frac{\beta_2(Z)}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} + \sigma(Z)\left|E\right|^2 E = iG(Z)E. \tag{5.25}$$

Die Funktion G steht dabei sowohl für den Verlust als auch für den Gewinn durch die Verstärker. Es gilt

$$G(Z)E := (-\gamma(Z) + g\sum_{k=1}^{n}\delta(Z - kL_A))E \quad \text{mit } g := \exp(\gamma L_A) - 1. \tag{5.26}$$

Dabei sind σ und γ in Abhängigkeit von Z gewählt worden, da diese Werte von Faser zu Faser verschieden sind. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Verstärker am Ende der Kompensationsperiode eingesetzt werden. Ist L die Kompensationsperiode, so gilt $L = L_A$. Die Gleichung soll im folgenden auf eine Standardform transformiert werden. Dazu benutzen wir folgende Substitution

$$t := \frac{T}{T_0}, \qquad z := \frac{Z}{L}, \qquad A(T,Z) := \frac{E(t,z)}{\sqrt{P_0}}, \tag{5.27}$$

wobei $|E|^2 = P_0|A|^2$. P_0 sei dabei die Energie des Impulses zu Beginn. T_0 bezeichne die anfängliche Impulsbreite bei halber Amplitudenhöhe.

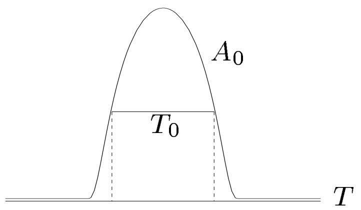


Abbildung 5.2.: Graphische Darstellung von T_0

Die Dispersionslänge sei definiert als $Z_{dis} = T_0^2/|\beta_2|$ und von der Ordnung des Verstärkerabstands.
Damit erhält man folgende Gleichung in den neuen Variablen t und z:

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + d(z)\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + c_0(z)\,|A|^2\,A = iLG(z)A. \tag{5.28}$$

Die neue Dispersionsfunktion d berechnet sich zu $d(z) := -\beta_2(z)L/2T_0^2$, weiter ist $c_0(z) := \sigma(z)P_0L$.

Bemerkung 5.3.1. *Ein typisches Beispiel für $d(z)$ ist eine symmetrische Dispersionsabbildung. Am Beginn der Faser ist ein Stück mit Dispersion d_1 eingesetzt, gefolgt von einem Abschnitt mit entgegengesetzter Dispersion d_2, und am Ende des Abschnittes wird symmetrisch dieselbe Faser wie am Anfang verwendet. Demnach hat d also die folgende Gestalt*

$$d(z) = \begin{cases} d_1 & : 0 \le z \le 1/4, 3/4 \le z \le 1 \\ d_2 & : \quad 1/4 < z < 3/4 \end{cases} \tag{5.29}$$

mit $d_1 d_2 < 0$. Für dieses $d(z)$ läßt sich der Mittelwert einfach berechnen:

$$< d >= \int_0^1 d(z)\,dz = \frac{1}{2}(d_1 + d_2). \tag{5.30}$$

Die 1-Periodizität liegt dabei aufgrund der Normierung $z = Z/L$ vor.

Nun wird eine weitere Transformation durchgeführt. Um die rechte Seite zu eliminieren, setzen wir in Anlehnung an den letzten Abschnitt

$$\tilde{A}(t,z) = A(t,z)\exp(\int_0^z LG(z')dz') \tag{5.31}$$

und erhalten die Standardform

$$i\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + d(z)\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} + c(z)|\tilde{A}|^2\tilde{A} = 0 \tag{5.32}$$

mit $c(z) = c_0(z)\exp(2\int_0^z LG(z')dz')$. $\tilde{A}$ erfüllt also die NLS mit periodischen Koeffizienten c und d, wobei d typischerweise stückweise konstant ist. Die Periodizität von c ist aufgrund der Betrachtungen in Abschnitt 5.2 durch Wahl von g klar.

Um das Verhalten des Impulses zu beschreiben, betrachtet man folgende Integralgrößen:

$$T_{int}(z) = \left(\frac{\int t^2|A|^2\,dt}{\int |A|^2\,dt}\right)^{1/2}, \tag{5.33}$$

$$\frac{T_{int}(z)}{M_{int}(z)} = \frac{i}{4}\frac{\int t(A\bar{A}_t - \bar{A}A_t)\,dt}{\int t^2|A|^2\,dt}. \tag{5.34}$$

Hierbei ist A_t die Zeitableitung, und zur Vereinfachung der Notation wurde die Tilde unterdrückt. T_{int} erinnert an die Varianz und beschreibt die gemittelte Impulsbreite. Der zweite Ausdruck beschreibt die zeitabhängige Phase des Impulses („pulse chirp“).

Nun ergibt sich folgendes Lemma, das die Beziehungen zwischen diesen Größen klärt:

Lemma 5.3.2.

Es gilt:
$$\frac{\partial T_{int}}{\partial z} = 4d(z)M_{int}(z) \tag{5.35}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(T_{int}M_{int}) = \frac{4d(z)\int |A_t|^2\,dt - c(z)\int |A|^4\,dt}{4\int |A|^2}\,dt \tag{5.36}$$

Beweis. Zunächst berechnen wir
$$\frac{\partial T_{int}}{\partial z} = \frac{1}{2T_{int}}\frac{\int |A|^2\,dt \int t^2(A\bar{A}_z+\bar{A}A_z)\,dt - \int t^2|A|^2\,dt \int(A\bar{A}_z+\bar{A}A_z)\,dt}{(\int |A|^2\,dt)^2}. \tag{5.37}$$

Da A Lösung von (5.32) ist, gilt
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}|A|^2 &= A\bar{A}_z + \bar{A}A_z\\ &= A(-i\ d(z)\bar{A}_{tt} - i\ c(z)|A|^2\bar{A}) + \bar{A}(i\ c(z)A_{tt} + i\ d(z)|A|^2 A)\\ &= id(z)(\bar{A}A_{tt} - A\bar{A}_{tt}).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Damit lassen sich die Integrale mit Hilfe partieller Integration wie folgt vereinfachen:
$$\int (A\bar{A}_z + \bar{A}A_z)\,dt = id(z)\int \bar{A}A_{tt} - A\bar{A}_{tt}\,dt = -id(z)\int |A_t|^2 - |A_t|^2\,dt = 0 \tag{5.39}$$
$$\begin{aligned}\int t^2(A\bar{A}_z + \bar{A}A_z)\,dt &= id(z)\int t^2(\bar{A}A_{tt} - A\bar{A}_{tt})\,dt\\ &= -id(z)\int t^2(|A_t|^2 - |A_t|^2)\,dt - 2id(z)\int t(\bar{A}A_t - A\bar{A}_t)\,dt\\ &= -2id(z)\int t(\bar{A}A_t - A\bar{A}_t)\,dt.\end{aligned} \tag{5.40}$$

Demnach gilt also
$$\frac{\partial T_{int}}{\partial z} = -i\frac{d(z)}{T_{int}(z)}\frac{\int t(\bar{A}A_t - A\bar{A}_t)\,dt}{\int |A|^2\,dt}, \tag{5.41}$$

und die Behauptung folgt aufgrund der Definition von T_{int} bzw. M_{int}.
Die zweite Gleichung wird analog bewiesen. □

Einschub : *Wir sind auf der Suche nach einem geeigneten Ansatz für A, dazu betrachten wir das lineare Problem*
$$i\frac{\partial A}{\partial z} + d(z)\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{5.42}$$

Für ein Eingangssignal in der Form einer Gaußschen Glockenkurve ($A(t,0) = N\exp(-t^2)$) *lautet die Lösung*
$$A(t,z) := \frac{N}{\sqrt{\tau(z)}}\exp(-\frac{t^2}{\tau^2(z)} + i\frac{t^2}{\tau^2(z)}C(z) + i\Phi(z)), \tag{5.43}$$

wobei $\tau^2(z) = 1 + 4R^2(z)$, $R(z) = 2\int_0^z d(\xi)\,d\xi$, $C(z) = 2R(z)$ *sowie* $\Phi(z) = -arctan(2R(z))/2$. *Falls die Dispersion exakt kompensiert wird* ($< d >= 0$), *ist die Funktion* $R(z)$ *periodisch, und für* $z = L$ *erhält der Impuls seine Form zurück. Weiter gilt*

$$A(t,z) = |A(t,z)|\exp(i\Theta(z,t)), \quad mit \quad \Theta(z,t) = \Phi(z) - \frac{t^2}{\tau^2(z)}C(z) \tag{5.44}$$

$$|A(t,z)| = \frac{N^2}{\sqrt{\tau(z)}}\exp(-(\frac{t}{\tau(z)})^2). \tag{5.45}$$

Setzen wir nun $Q(\xi,z) = N^2\exp(-\xi^2)\exp(i\Phi(z))$ *und* $\nu(z) = C(z)/\tau(z)$, *so ergibt sich mit* $\xi(z) = t/\tau(z)$ *:*

$$A(t,z) = \frac{Q(\xi(z),z)}{\sqrt{\tau(z)}}\exp(i\frac{\nu(z)}{\tau(z)}t^2). \tag{5.46}$$

Die Lösung klingt in der Variable ξ *exponentiell ab, man beachte die zeitliche Änderung der Phase im zweiten Term.*

Motiviert dadurch wollen wir nun die Lösung des nichtlinearen Problems in folgender Darstellung suchen:

$$A(t,z) = \frac{Q(\xi(z),z)}{\sqrt{\tau(z)}}\exp(i\frac{\nu(z)}{\tau(z)}t^2). \tag{5.47}$$

Dabei haben wir $\xi(z,t) = t/\tau(z)$ gesetzt.

Bemerkung 5.3.3. *Mit Hilfe dieses Ansatzes erhalten wir später die NLS mit quadratischem Potential. Bei der Herleitung erkennt man, daß die Art des Potentials von der quadratischen Zeitabhängigkeit der Phase im Ansatz* (5.47) *stammt. Diese Abhängigkeit ist in zweierlei Weise zu rechtfertigen: Einerseits erscheint dieser Ansatz nach dem Betrachten des linearen Problems sinnvoll; andererseits vereinfacht dies die Gleichungen enorm: Angenommen, wir würden* t^2 *durch eine beliebige Funktion* $g(t)$ *ersetzen, so gelangt man nach dem Einsetzen in* (5.32) *zu Termen, die einen Faktor* $g' - 2g$ *enthalten. Damit diese Terme wegfallen, muß also* $g(t) = ct^2$ *sein.*

Bevor wir nun den Ansatz (5.47) in (5.32) einsetzen, können wir noch folgenden Zusammenhang zwischen den charakteristischen Integralgrößen T_{int} und M_{int} sowie τ und ν herleiten:

Lemma 5.3.4. *Die Funktionen* τ *bzw.* ν *stehen in folgender Beziehung zu* M_{int} *bzw.* T_{int}*:*

$$T_{int}(z) = \tau(z)\left(\frac{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}{\int |Q(\xi,z)|^2\,d\xi}\right)^{1/2},$$

$$\frac{M_{int}(z)}{T_{int}(z)} = \frac{\nu(z)}{\tau(z)} + \frac{i}{4\tau^2(z)}\frac{\int \xi(Q(\xi,z)\bar{Q}_\xi(\xi,z) - \bar{Q}(\xi,z)Q_\xi(\xi,z))\,d\xi}{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}.$$

Beweis. Aufgrund von (5.47) gilt

$$T_{int}(z) = \left(\frac{\int t^2|A|^2\,dt}{\int |A|^2\,dt}\right)^{1/2} = \left(\frac{\int \xi^2\tau^2(z)\frac{|Q|^2}{\tau(z)}\tau(z)\,d\xi}{\int \frac{|Q|^2}{\tau(z)}\tau(z)\,d\xi}\right)^{1/2} = \tau(z)\left(\frac{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}{\int |Q(\xi,z)|^2\,d\xi}\right)^{1/2}, \tag{5.48}$$

wobei im Integral $\xi = t/\tau(z)$ substituiert wurde.
Um die zweite Gleichheit zu beweisen, muß Beziehung (5.47) differenziert werden und dann in die Formel für M_{int}/T_{int} eingesetzt werden. Mit obiger Substitution gelangt man auch hier zum Ziel. □

Durch den Ansatz (5.47) erhält man folgende Gleichung für $Q(\xi, z)$:

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{d(z)}{\tau(z)^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \xi^2} + +\frac{c(z)}{\tau}|Q|^2 Q - \left(\tau(z)\frac{\partial \nu}{\partial z} - \nu(z)\frac{\partial \tau}{\partial z} + 4d(z)\nu^2(z)\right)\xi^2 Q \\ =&i\frac{1}{2\tau(z)}\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} - 4d(z)\nu(z)\right)Q + i\left(\frac{\partial \tau}{\partial z} - 4d(z)\nu(z)\right)\xi\frac{\partial Q}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

An dieser Stelle taucht also erstmals da quadratische Potential auf. Um diese Gleichung zu vereinfachen, fordern wir nun

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 4d(z)\nu(z). \tag{5.50}$$

Dadurch verschwindet die rechte Seite, und wir erhalten

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{d(z)}{\tau^2}\frac{\partial Q^2}{\partial \xi^2} + \frac{c(z)}{\tau}|Q|^2 Q = \tau(z)\frac{\partial \nu}{\partial z}\xi^2 Q. \tag{5.51}$$

Mit Hilfe zweier Zusatzbedingungen läßt sich die Gleichung für τ auch analytisch rechtfertigen, dies ist Gegenstand des folgenden Lemmas. Diese Bedingungen gelten im linearen Fall und wurden im allgemeinen von Turitsyn und Shapiro in [18] durch numerische Berechnungen gerechtfertigt.

Lemma 5.3.5. *Unter den Voraussetzungen*

$$(V_1)\ \frac{\partial}{\partial \xi}\arg(Q(\xi,z)) = 0 \quad \textit{und} \quad (V_2)\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}{\int |Q(\xi,z)|^2\,d\xi}\right) = 0 \quad \textit{gilt:}$$

$$\tau \textit{ ist Lösung von } \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = 4d(z)\nu(z). \tag{5.52}$$

Beweis. Es gilt aufgrund von (V_2) sowie den Lemmata 5.3.2 und 5.3.4

$$\begin{aligned} 4d(z)M_{int}(z) &= \frac{\partial}{\partial z}T_{int}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\tau(z)\left(\frac{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}{\int |Q(\xi,z)|^2\,d\xi}\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial z}\left(\frac{\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\,d\xi}{\int |Q(\xi,z)|^2\,d\xi}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 4d(z)\tau(z)\frac{M_{int}(z)}{T_{int}(z)}. \tag{5.53}$$

Wir erinnern an die Gestalt von M_{int}/T_{int} aus Lemma 5.3.4 und zeigen nun, daß der zweite Summand aus der Formel für M_{int}/T_{int} verschwindet:
Wir behaupten also

$$\int \xi(Q(\xi,z)\bar{Q}_\xi(\xi,z) - \bar{Q}(\xi,z)Q_\xi(\xi,z))\, d\xi = 0. \tag{5.54}$$

Wegen (V_1) läßt sich Q wie folgt in Polarkoordinaten schreiben:

$$Q(\xi,z) = R(\xi,z)e^{i\phi(z)}, \tag{5.55}$$

wobei R und ϕ reellwertig sind. Dabei ist ϕ nach (V_1) unabhängig von ξ. Es gilt dann $Q_\xi = R_\xi e^{i\phi}$ und demzufolge

$$Q\bar{Q}_\xi - \bar{Q}Q_\xi = RR_\xi - RR_\xi = 0. \tag{5.56}$$

Nun gilt also

$$\frac{M_{int}(z)}{T_{int}(z)} = \frac{\nu(z)}{\tau(z)}, \tag{5.57}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir haben noch die Freiheit, die Gleichung für ν festzulegen. Dabei hilft folgendes Lemma:

Lemma 5.3.6. *Unter der Bedingung* (V_1) $\frac{\partial}{\partial \xi}\arg(Q(\xi,z)) = 0$ *gilt:*

$$\nu \textit{ ist Lösung von } \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = C_1\frac{d(z)}{\tau^3(z)} - C_2\frac{c(z)}{\tau^2(z)} \tag{5.58}$$

mit unter der obigen Voraussetzung von z unabhängigen Konstanten

$$C_1 = \frac{\int |Q_\xi(\xi,z)|^2\, dx}{\int \xi^2 |Q(\xi,z)|^2\, d\xi}, \qquad C_2 = \frac{\int |Q(\xi,z)|^4\, dx}{4\int \xi^2|Q(\xi,z)|^2\, d\xi}. \tag{5.59}$$

Beweis. Aufgrund von (V_1) gilt wie im Beweis von Lemma 5.3.4

$$Q\bar{Q}_\xi - \bar{Q}Q_\xi = RR_\xi - RR_\xi = 0. \tag{5.60}$$

Weiter läßt sich zeigen, daß wegen (5.52) Bedingung (V_2) erfüllt ist. Der Rest des Beweises verläuft abermals durch Ausnutzen der Gleichung für Q und partieller Integration. □

Begründet durch Lemma 5.3.6 verlangen wir nun

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} = C_1 \frac{d(z)}{\tau^3(z)} - C_2 \frac{c(z)}{\tau^2(z)}. \tag{5.61}$$

Bemerkung 5.3.7.

1. *Nach einer Kompensationsperiode wollen wir die Form des Impulses zurückerhalten. Daher sollten ν und τ 1-periodische Lösungen für das System* (5.58) *und* (5.52) *sein, genauer:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 4d(z)\nu(z), \quad \textit{mit} \quad \tau(0) = \tau(1) \\ \frac{\partial \nu}{\partial z} &= C_1 \frac{d(z)}{\tau^3(z)} - C_2 \frac{c(z)}{\tau^2(z)}, \quad \textit{mit} \quad \nu(0) = \nu(1) \end{aligned} \tag{5.62}$$

2. *Die Existenz* 1*-periodischer Lösungen für das System* (5.62) *wurde von Kunze [16] für das symmetrische Dispersionsprofil* (5.29) *mit $d_+ \neq d_-$ bewiesen.*

3. *Das System* (5.62) *wird in [18] mit Hilfe von Variationsmethoden hergeleitet.*

4. *Für das Eingangssignal $A(0,\xi) = \exp(-\xi^2)$ gilt $C_1 = 4, C_2 = 1/\sqrt{2}$.*

Nach (5.61) ist Q somit Lösung von

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{d(z)}{\tau^2(z)}(\frac{\partial Q^2}{\partial \xi^2} - C_1\, \xi^2 Q) + \frac{c(z)}{\tau(z)}(|Q|^2 Q + C_2\, \xi^2 Q) = 0. \tag{5.63}$$

Nun wird die Gleichung wieder über die Distanz zweier Verstärker in z gemittelt. Dies kann jetzt geschehen, da die Oszillationen, die durch die Wahl des Dispersionsprofils auftauchten, nun in der Nichtlinearität enthalten sind. Es ergibt sich

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z} + r_1 \frac{\partial Q_0^2}{\partial \xi^2} - r_1 C_1 \xi^2 Q_0 + r_2(|Q_0|^2 Q_0 + C_2\, \xi^2 Q_0) = 0, \tag{5.64}$$

wobei $r_1 =< d/\tau^2 >$, $r_2 =< c/\tau >$ und $Q_0 \sim Q$.
Diese Gleichung schreiben wir mit $a := C_1 r_1 - C_2 r_2$ als

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z'} + r_1 \frac{\partial Q_0^2}{\partial \xi^2} - a\xi^2 Q_0 + r_2 |Q_0|^2 Q_0 = 0. \tag{5.65}$$

Demnach erfüllt also Q näherungsweise die NLS mit zusätzlichem parabolischen Potential $-a\, \xi^2$.

Bemerkung 5.3.8. *Wir erkennen, daß sich die Forderung $k'' < 0$ bzw. $d(z) > 0$ wie folgt auf die gemittelte NLS überträgt: Um eine Lösung in Gestalt einer hellen Solitone zu erhalten, muß die sogenannte effektive Dispersion $r_1 =< d/\tau^2 >$ positiv sein.*

Die qualitative Gestalt der Lösungen von (5.65), sowie das Spektrum der Linearisierung sind abhängig vom Vorzeichen von a. Daher ist es von Interesse, dies genauer zu untersuchen. Im nächsten Abschnitt werden wir uns dem Problem anhand eines Beispiels numerisch nähern. Analytisch läßt sich folgendes Lemma leicht überprüfen:

Lemma 5.3.9 (Das Vorzeichen von *a*). *Sind τ und ν periodische Lösungen von* (5.62), *so gilt* $sgn(a) = -sgn(< d\nu^2 >)$.

Beweis. Wir erkennen mit Hilfe von (5.62)

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tau\nu) = 4d(z)\nu^2(z) + C_1\frac{d(z)}{\tau^2(z)} - C_2\frac{c(z)}{\tau(z)}. \tag{5.66}$$

Durch Mittelwertbildung folgt nun aufgrund der Periodizität von τ und ν

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}(\tau\nu) \right\rangle = 4\left\langle d\nu^2 \right\rangle + C_1\left\langle \frac{d}{\tau^2} \right\rangle - C_2\left\langle \frac{c}{\tau} \right\rangle = 4\left\langle d\nu^2 \right\rangle + a. \tag{5.67}$$

Demzufolge hat a das negative Vorzeichen von $< d\nu^2 >$. □

Bemerkung 5.3.10. *Natürlich hängt das Vorzeichen von a von der Dispersion in der Faser ab. Insofern scheint klar, daß man die Parameter (vor allem d_1 und d_2) des Systems derart wählen kann, daß a das gewünschte Vorzeichen erhält. Es wäre jedoch wünschenswert, dies direkt ablesen zu können und nicht zuerst τ und ν bestimmen zu müssen, d.h. System* (5.62) *zu lösen. Eine derartige Beziehung ließ sich jedoch nicht herleiten. In der Literatur findet man ebenfalls wenig zu dieser Problematik. Hasegawa, Kodama und Maruta beweisen in einer Arbeit [21], daß $a < 0$ ist. Dies geschieht allerdings unter der Annahme stückweise konstanter Funktionen τ und ν, was auch bei stückweise konstantem Dispersionsprofil nicht zutrifft. Insofern darf diese Arbeit nur als ein erster Anhaltspunkt verstanden werden. Turitsyn verweist in [18] bzw. [22] auf Untersuchungen für die einfachsten Typen von Dispersionsprofilen, die zeigen, daß $a < 0$ ist. Allerdings findet man auch dort nichts Genaueres.*

Wir haben also in diesem Abschnitt gesehen, daß die Signalausbreitung im Falle des Dispersionsmanagements durch

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z'} + r_1\frac{\partial Q_0^2}{\partial \xi^2} - a\xi^2 Q_0 + r_2|Q_0|^2 Q_0 = 0$$

beschrieben wird. Dabei kann der Parameter a beide Vorzeichen besitzen.

5.3.1. Numerische Untersuchung von a

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie man im konkreten Fall das Vorzeichen von a numerisch bestimmen kann; dies wird anhand eines Beispiels erklärt. Dabei ist auf das Verfahren Wert gelegt worden. Genauere numerische Betrachtungen, wie etwa die numerische Integration von $d\nu^2$, sollen hier nicht eingehen.

Zunächst wählen wir ein spezielles Dispersionsprofil der Form (5.29), wobei $d_1 = -2$ und $d_2 = 8$, genauer:

$$d(z) = \begin{cases} -2 & : 0 \leq z \leq 0.4, 0.6 \leq z \leq 1 \\ 8 & : \quad 0.4 < z < 0.6. \end{cases} \tag{5.68}$$

Dies ist ein symmetrisches Dispersionsprofil vom ersten Typ (vgl. [18]). Zum weiteren Vorgehen müssen nun ν und τ als 1-periodische Lösungen der Gleichung (5.62) gefunden werden. Danach läßt sich der Parameter a numerisch berechnen.
Dazu versehen wir Gleichung (5.62) mit Anfangsbedingungen $\tau(0) = 1$ und $\nu(0) = 0$, die Konstante C_1 sei fixiert als $C_1 := 1/2$. Wir suchen nach periodischen Lösungen und betrachten das Phasendiagramm für $C_2 = 2$:

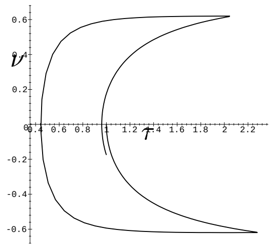


Abbildung 5.3.: Phasendiagramm für $C_2 = 2$

Wir müssen nun den Parameter C_2 derart verändern, daß τ und ν periodisch werden. Für $C_2 = 3.1$ sieht das Phasenportrait wie folgt aus:

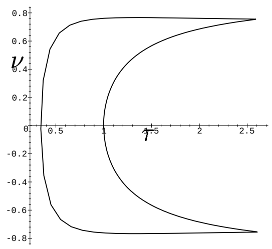


Abbildung 5.4.: Phasendiagramm für $C_2 = 3.1$

Somit sind ν und τ für $C_2 \sim 3.1$ periodische Lösungen von (5.62). Im folgenden Diagramm sind sie zusammen mit dem Dispersionsprofil aufgetragen:

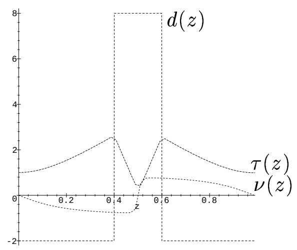


Abbildung 5.5.: Graphische Darstellung von τ, ν und d

Nun können wir uns dem Parameter a nähern. Wir erinnern daran, daß aufgrund von Lemma 5.3.9 $a = -4 < d\nu^2 >$ gilt. Daher ist die Funktion $d\nu^2$ von Interesse:

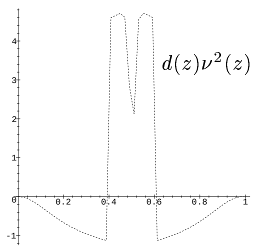


Abbildung 5.6.: Die Funktion $d\nu^2$

Offenbar ist der Mittelwert von $d\nu^2$ positiv, und demzufolge ist in diesem Fall $a < 0$. Auch die Größe $< d/\tau^2 >$ läßt sich graphisch bestimmen:

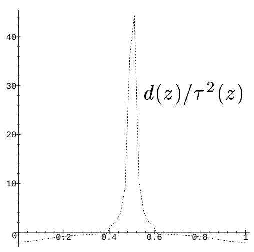


Abbildung 5.7.: Die Funktion d/τ^2

Also ist die effektive Dispersion positiv, wir befinden uns daher in dem Bereich, in dem die hellen Solitonen existieren.

5.4. Einsatz von Modulatoren

Wir wollen uns nun mit dem „Gordon-Haus jitter“ befassen, da dieser Effekt die Gestalt des Signals über lange Distanzen stark verändern kann. Vereinfacht gesagt beschreibt der „Gordon-Haus jitter“ die zufällige Ankunftszeit der Impulse. Insofern kann dies als eines der größten Hindernisse bei der Erhöhung der Übertragungsdistanzen verstanden werden und muß daher in der Gleichung berücksichtigt werden.
Zu Beginn dieses Abschnittes soll der „Gordon-Haus jitter“ erklärt werden; im weiteren Verlauf wird dann der Einsatz von Phasenmodulatoren, die das Signal wieder in Phase bringen, diskutiert. Schließlich wird dies in der NLS berücksichtigt, nach der Mittelung werden wir ein zusätzliches periodisches Potential erhalten.

Wie angekündigt, werden wir uns zunächst der Erklärung des oben genannten Effekts widmen. Dieser beruht darauf, daß auch nach dem Einsatz der Verstärker nicht gesichert ist, daß die Informationen des Signals eindeutig zu erkennen sind. An jedem Verstärker entsteht nämlich ein kleiner Störterm, der sich allerdings über eine Vielzahl von Verstärkern aufsummieren kann. Dies wird nun näher erläutert:

Mit Rauschen („noise“) wollen wir ein zufällig erzeugtes elektromagnetisches Feld bezeichnen, das den gleichen Frequenzbereich belegt wie das Signal selbst. Es tritt jetzt folgendes Problem auf: Am Ausgang jedes Verstärkers werden zusätzlich zu dem Signal weitere Photonen ausgestoßen, durch die ein Rauschen entstehen kann. Dieser Vorgang wird mit „amplified spontaneous emission (ASE)“ bezeichnet und verschlechtert das Signal-Stör-Verhältnis („signal-to-noise ratio (SNR)“). Mathematisch betrachtet ist ASE eine stochastische Größe. Zum leichteren Verständnis dient Abbildung 5.4, die aus [4] entnommen ist:

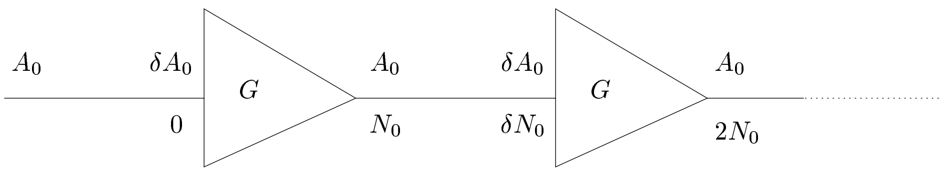


Abbildung 5.8.: Darstellung des Rauschens

Hierbei sollen die Dreiecke die Verstärker darstellen. Das Eingangssignal A_0 wird bis zum Eingang der Verstärker durch den Verlust auf δA_0 reduziert, durch die Verstärker jedoch reproduziert. Dabei tritt der Rauschterm auf, der mit N_0 bezeichnet wird. Man erkennt, daß dieser sich von Verstärker zu Verstärker erhöht.

Der Rauschterm interagiert nun mit dem Signal und verändert so die charakteristischen Größen, wie z.B. die Frequenz. Aufgrund der Dispersion variiert natürlich auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals; der Zeitpunkt des Eintreffens am nächsten Verstärker ist eine stochastische Größe. Dieses Phänomen wurde von Gordon und Haus entdeckt und wird daher mit „Gordon-Haus Effekt“ bzw. „Gordon-Haus jitter“ bezeichnet. Um die damit verbundenen Probleme zu minimieren, werden nun Phasenmodulatoren eingesetzt, die die Phase des Signals kontrollieren und verändern.

Bemerkung 5.4.1. *Im Buch von Mecozzi et al. [14] findet man einen mathematischen Ausdruck für den Gordon-Haus Effekt: Ausgehend von der bekannten Soliton-Lösung der NLS* (5.1) *wird mit einem störungstheoretischen Ansatz die Veränderung der Parameter der Solitone untersucht. Dabei erkennt man, daß die Änderungen der Phase von höherer Ordnung als z.B. der Amplitude sind. Daher sind diese bei langen Ausbreitungsdistanzen von höherer Bedeutung.*

Mathematisch läßt sich die Wirkung eines Phasenmodulators wie folgt beschreiben:

$$A_{out} = A_{in} \exp\left(\pm i\Phi \cos(\omega_m \tau)\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial A}{\partial \xi} = \pm i\Phi \cos(\omega_m \tau) A. \tag{5.69}$$

Hierbei ist Φ die maximale Abweichung der Phase, ω_m bezeichnet die Antriebsfrequenz des Modulators.

Bemerkung 5.4.2. *Um die Phasenänderung besser zu verstehen, erinnern wir uns an die Lösung des linearen Problems mit Anfangsdaten in der Form einer Gaußschen Glockenkurve. In den Variablen dieses Abschnitts schreibt diese sich als*

$$A(\tau,\xi) := \frac{N}{\sqrt{t(\xi)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{t^2(\xi)} + i\frac{\tau^2}{t^2(\xi)} C(\xi) + i\Phi(\xi)\right).$$

Ist dies das Eingangssignal in den Phasenmodulator, so gilt nach dem Verlassen:

$$\begin{aligned} A_{out} &= \exp\left(\pm i\Phi \cos(\omega_m \tau)\right) \frac{N}{\sqrt{t(\xi)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{t^2(\xi)} + i\frac{\tau^2}{t^2(\xi)} C(\xi) + i\Phi(\xi)\right) \\ &= \frac{N}{\sqrt{t(\xi)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{t^2(\xi)}\right) \exp\left(i\left[\pm \Phi \cos(\omega_m \tau) + \frac{\tau^2}{t^2(\xi)} C(\xi) + \Phi(\xi)\right]\right). \end{aligned}$$

Entwicklung des cos in seine Taylorreihe liefert nun im Fall $-\Phi$:

$$A_{out} \sim \frac{N}{\sqrt{t(\xi)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{t^2(\xi)}\right) \exp\left(i\left[\frac{C(\xi)}{t^2(\xi)} - \frac{1}{2}\omega_m^2\right]\tau^2\right).$$

Diese Betrachtungen machen deutlich, warum die Phasenänderung mit Hilfe des cos vollzogen wird. Der Grund liegt gerade darin, daß die zeitabhängige Phase quadratisch von τ abhängt und so der cos-Term sowohl die zeitunabhängige Phase wie auch den „Chirp“ verändern kann.

Diese Phasenmodulatoren sollen nun in die NLS miteinbezogen werden:

Dabei gehen wir von der modifizierten Gleichung (5.9) aus und berücksichtigen dabei das Rauschen durch Einbeziehung der Verteilungsfunktion n, die den Erwartungswert 0 hat. Es ergibt sich

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu |A|^2 A = i(-\gamma + g\sum_{k=1}^{n} \delta(\xi - \xi_k))A + n(\xi,\tau). \tag{5.70}$$

Nun nehmen wir an, daß die Modulatoren sowie die Verstärker äquidistant an den gleichen Stellen in die Faser eingesetzt werden. Desweiteren vernachlässigen wir den Rauschterm und erhalten

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu\,|A|^2\,A = i(-\gamma + g\sum_{k=1}^{n}\delta(\xi-\xi_k))A - \Phi\cos(\omega_m\tau)\sum_{k=1}^{n}\delta(\xi-\xi_k)A. \tag{5.71}$$

Bemerkung 5.4.3. *Die Vernachlässigung des Rauschterms ist sehr fragwürdig, da die Phasenmodulatoren gerade zu dessen Kontrolle eingesetzt wurden. In der Literatur erklärt man dies teilweise dadurch, daß n Erwartungwert 0 hat. Sinnvoller erscheint der Weg, den Rauschterm in der gemittelten Gleichung als Störterm aufzufassen, der die Parameter der solitonförmigen Lösung der rauschfreien Gleichung verändert.*

Um auf eine Standardform zu gelangen, wenden wir abermals die Transformation

$$A(\xi,\tau) = F(\xi)Q(\xi,\tau) \tag{5.72}$$

an, wobei F Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \big(-\gamma + g\sum_{k=1}^{n}\delta(\xi-\xi_k)\big)F, \quad F(0)=1 \tag{5.73}$$

sein soll. Dabei verschwinden wieder die starken Oszillationen, die von den Verstärkern herrühren. Man gelangt zu

$$i\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + \nu|F(\xi)|^2|Q|^2Q = \pm\Phi\cos(\omega_m\tau)\sum_{k=1}^{n}\delta(\xi-\xi_k)Q. \tag{5.74}$$

Mittelung dieser Gleichung über die Verstärker- bzw. Modulatorperiode L_A liefert dann

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma|Q_0|^2Q_0 = \pm\Phi\frac{\cos(\omega_m\tau)}{L_A}Q_0. \tag{5.75}$$

Dies ist die NLS mit zusätzlichem periodischen Potential $\pm\Phi\cos(\omega_m\tau)/L_A$, sie ist also die beschreibende Gleichung, wenn wir Phasenmodulatoren miteinbeziehen.

Bemerkung 5.4.4. *Betrachtet man diese Gleichung nur für kleine τ, so läßt sich das periodische Potential* cos *durch ein parabolisches der Form ct^2 ersetzen:*

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma|Q_0|^2Q_0 = \pm(\nu_0 - \nu_2\tau^2)Q_0, \tag{5.76}$$

wobei

$$\nu_0 := \frac{\Phi}{L_A} \qquad \nu_2 := \frac{1}{2}\Phi\frac{\omega_m^2}{L_A}. \tag{5.77}$$

Dieser Ansatz wird von Turitsyn [23] sowie Smith et al. [24] verfolgt. Formal gelangt man zu derselben Gleichung wie im letzten Abschnitt bei der Betrachtung des Dispersionsmanagements. In diesem Fall ist jedoch offensichtlich, daß das parabolische Potential beide Vorzeichen annehmen kann, abhängig von dem Einsatz des Modulators. Selbstverständlich ist es nicht sinnvoll, diese Gleichung für $\tau \in (0,\infty)$ zu betrachten, wie es in der Literatur teilweise geschieht (vgl. dazu Bemerkung 6.1.1).

Zusammenfassung:

In diesem Kapitel haben wir durch die Einbeziehung von Instrumenten, die zur Verlustkompensation dienen, Modifikationen der NLS hergeleitet. Genügen dazu ausschließlich Verstärker, befindet man sich im verlustfreien Fall. Die beschreibende Gleichung ist die bekannte NLS:

$$i\frac{\partial E}{\partial Z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} + \nu\eta|E|^2 E = 0. \tag{5.78}$$

Falls zusätzlich zu den Verstärkern das Dispersionsmanagement zur Kompensation des Verlustes eingesetzt wird, gelangt man zu der NLS mit zusätzlichem quadratischen Potential:

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z} + r_1\frac{\partial Q_0^2}{\partial \xi^2} - a\xi^2 Q_0 + r_2|Q_0|^2 Q_0 = 0. \tag{5.79}$$

Setzt man Phasenmodulatoren ein, die den Einfluß des Gordon-Haus Effekts vermindern sollen, erhalten wir die NLS mit einem periodischen Potential:

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma|Q_0|^2 Q_0 = \pm\Phi\frac{\cos(\omega_m \tau)}{L_A}Q_0. \tag{5.80}$$

Dabei haben wir die Variablen verwendet, die bei der Herleitung der einzelnen Gleichungen benutzt wurden und auf einheitliche Bezeichnungen verzichtet. Im nächsten Kapitel wird dann das Lösungsverhalten der beiden letzten Gleichungen untersucht.

6. Verzweigungsuntersuchungen

Ziel dieses Kapitels ist es, die im letzten Abschnitt bei der Betrachtung des Dispersionsmanagements bzw. der Phasenmodulatoren gewonnenen Gleichungen, nämlich die NLS mit zusätzlichem parabolischen bzw. periodischen Potential, näher zu untersuchen. Durch einen geeigneten Ansatz werden die Gleichungen in ein skalares, nichtlineares Eigenwertproblem übergehen. Dabei wird dann untersucht, inwieweit die Gleichungen die Beobachtungen der Praxis modellieren können. Dabei ist man an der Art und Existenz der Lösungen, besonders deren Stabilität, interessiert. Wir werden uns diesem Problem mit Methoden der Verzweigungstheorie nähern.

Im Fall des parabolischen Potentials mit $a > 0$ gibt eine Arbeit von Küpper, Kunze, Mezentsev, Turitsyn und Shapiro [25] bereits die gewünschten Antworten, die Existenz von globalen Lösungszweigen wird nachgewiesen und deren Stabilität untersucht.

Für $a < 0$ sind dagegen keine Ergebnisse bekannt. Wie wir sehen werden, hat die graphische Lösung der zugehörigen Gleichung eine sinnvolle Gestalt.

Bei der Betrachtung des periodischen Potentials lassen sich mit Hilfe eines Ergebnisses von Buffoni und Jeanjean [26], das eine Weiterentwicklung von Arbeiten von Küpper und Stuart [27, 28] darstellt, auch Verzweigungsresultate erzielen. Jedoch ist hier die Existenz von Zweigen nicht gesichert. Dies erschwert natürlich die Stabilitätsuntersuchungen.

6.1. Die NLS mit parabolischem Potential

In diesem Abschnitt soll die NLS mit parabolischem Potential untersucht werden. Wie im letzten Kapitel hergeleitet, beschreibt sie näherungsweise die Impulsausbreitung in einem Datenübertragungssystem mit Dispersionsmanagement. Eine weitere Anwendung dieser Gleichung ist durch den Einsatz von Phasenmodulatoren gegeben. Zunächst werden diese Gleichungen auf eine Standardform transformiert.

Im Falle des Dispersionsmanagements ist die beschreibende Gleichung:

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial z'} + r_1\frac{\partial Q_0^2}{\partial \xi^2} - a\xi^2 Q_0 + r_2|Q_0|^2 Q_0 = 0. \tag{6.1}$$

Um eine Standardform zu erreichen, substituieren wir jetzt

$$t := |r_2|z' \quad , \quad x := \sqrt{\frac{|r_2|}{2r_1}}\xi \tag{6.2}$$

und erhalten mit $A(t,x) = Q_0(z',\xi)$:

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A - \tilde{a}\xi^2 A = 0, \tag{6.3}$$

wobei $\tilde{a} = ar_1/2r_2^2$. Da die effektive Dispersion r_1 als positiv angenommen wurde besitzen a und $\tilde{a}$ das gleiche Vorzeichen. Um den mathematischen Konventionen zu folgen, wurden hier Orts- und Zeitvariablen vertauscht.

Im Falle des Einsatzes von Phasenmodulatoren läßt sich die beschreibende Gleichung für kleine τ in folgender Form schreiben (vgl. Bemerkung 5.4.4):

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma|Q_0|^2 Q_0 = \pm(\nu_0 - \nu_2\tau^2)Q_0, \tag{6.4}$$

wobei

$$\nu_0 := \frac{\Phi}{L_A} \qquad \nu_2 := \frac{\Phi}{2}\frac{\omega_m^2}{L_a} \tag{6.5}$$

Wir skalieren die Variablen, sowie Q_0 in folgender Form:

$$\xi = L_A t, \quad \tau = \sqrt{|k_1''|L_A}x, \quad Q_0(\xi,\tau) = \frac{\exp(\mp i\nu_0\xi)}{\sqrt{\nu\sigma L_A}}A(t,x). \tag{6.6}$$

Damit ergibt sich ebenfalls die Standardgleichung

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + |A|^2 A - a\xi^2 A = 0, \tag{6.7}$$

wobei in diesem Fall $a = \pm\nu_2|k_1''|L_A^2$ beide Vorzeichen besitzen kann. Wir haben also erkannt, daß die NLS mit parabolischem Potential sowohl Signalausbreitung unter Verwendung des Dispersionsmanagements als auch den Einsatz von Phasenmodulatoren beschreiben kann.

Bemerkung 6.1.1. *Bei der Anwendung von* (6.3) *auf den Einsatz von Phasenmodulatoren tauchen hier Ungereimtheiten auf. Die Gleichung wurde nur für kleine τ durch Approximation des cos hergeleitet. Nun fordert man eine Randbedingung für $x = \tau/\sqrt{|k_1''|L_A}$ im Unendlichen. Mathematisch läßt sich dies nicht rechtfertigen, offenbar bestätigen jedoch numerische Untersuchungen die Beobachtungen der Praxis (vgl. [23]).*

Im folgenden wollen wir Lösungen von (6.3) der Form

$$A(x,t) = F(x)\exp(ikt) \tag{6.8}$$

suchen. Es sei daran erinnert, daß die Variable t durch diverse Transformationen aus der Koordinate z, die die Längskomponente der Faser darstellte, hervorging. Insofern läßt sich k als eine Verschiebung der ursprünglichen Wellenzahl deuten. F beschreibt nun eine stationäre Lösung, die sich gemäß $\exp(ikt)$ in der Faser ausbreitet.
Die Funktion F ist nun Lösung des skalaren, nichtlinearen Eigenwertproblems

$$\frac{1}{2}F_{xx} + |F|^2 F - ax^2 F = kF. \tag{6.9}$$

Der natürliche Raum, in dem nach Lösungen gesucht wird, ist

$$X := \{F \in H^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 F^2(x)\,dx < \infty\}. \tag{6.10}$$

Dabei ist $H^1(\mathbb{R})$ der Sobolevraum $W^{1,2}(\mathbb{R})$. Zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)u(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}} u'(x)v'(x)dx \tag{6.11}$$

wird X zu einem Hilbertraum.

Im folgenden wollen wir nun unterscheiden, welches Vorzeichen a hat:

6.1.1. Der Fall $a > 0$

Wie bereits erwähnt, ist dieses Problem mit $a > 0$ in [25] eingehend untersucht worden. Daher werden hier nur kurz die dort erzielten Ergebnisse zitiert:

Das Hauptresultat ist

Satz 6.1.2. (Globales Verzweigungsresultat)
Es existieren abzählbar viele Lösungszweige, die von der trivialen Lösung $F = 0$ verzweigen. Die zugehörigen Parameter (a, k) der Verzweigungspunkte liegen in der Menge

$$P_n = \{(a, k) \in [0, \infty[\times] - \infty, 0] : -\sqrt{\frac{2}{a}}\; k = 2n + 1\}$$

mit beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$. Die zugehörigen Lösungskomponenten sind dabei unbeschränkt in $\mathbb{R} \times X$.

Überblick über den Beweis. Um das Problem auf ein Standardverzweigungsproblem zu transformieren, wird zunächst $F(x) = u(\gamma x)$ mit $\gamma = (2a)^{1/4}$ gesetzt. Mit $\xi = \gamma x$ erhält man

$$-u_{\xi\xi} + \xi^2 u - \sqrt{\frac{2}{a}}|u|^2 u = -\sqrt{\frac{2}{a}}ku \tag{6.12}$$

als einen Spezialfall der allgemeinen Form

$$Lu = -u_{xx} + x^2 u + f(x, u) = \lambda u. \tag{6.13}$$

Dieses Problem ist insofern einfach zu behandeln, als daß bekannt ist, daß das Spektrum von L aus einfachen Eigenwerten besteht. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind ebenfalls bekannt und von der Form $u_n(x) := \exp(-x^2/2)H_n(x)$, wobei H_n das Hermite-Polynom n-ter Ordnung ist. Um nun das globale Verzweigungsresultat von Rabinowitz anwenden zu können, welches die Behauptung sichert, wird diese Gleichung mit Hilfe der Greenschen Funktion in Integralform geschrieben. □

Über das lokale Verzweigungsverhalten gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 6.1.3. (Lokales Verzweigungsverhalten)
Sei für festes $a > 0$ der n-te Eigenwert der ursprünglichen Gleichung mit $k_n = (2n + 1)\sqrt{2/a}$ bezeichnet, d.h. $(a, k_n) \in P_n$. Die in diesen Punkten auftretende Verzweigung ist superkritisch, genauer gilt lokal um den Verzweigungspunkt $(k_n, 0)$:

$$k(s) \sim k_n + \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{\eta_n}{2}s^2, \quad \textit{wobei} \quad \eta_n := 4\sqrt{\frac{2}{a}}(n+1)\frac{|u_n|_{L^4}}{|u_n|_X} > 0 \tag{6.14}$$

Desweiteren lassen sich die verzweigenden Lösungen wie folgt approximieren:

$$F_k(x) \sim 2\sqrt{\frac{k - k_n}{\eta_n}}\frac{u_n(\gamma x)}{\gamma}, \quad \textit{wobei} \quad \gamma = (2a)^{1/4} \tag{6.15}$$

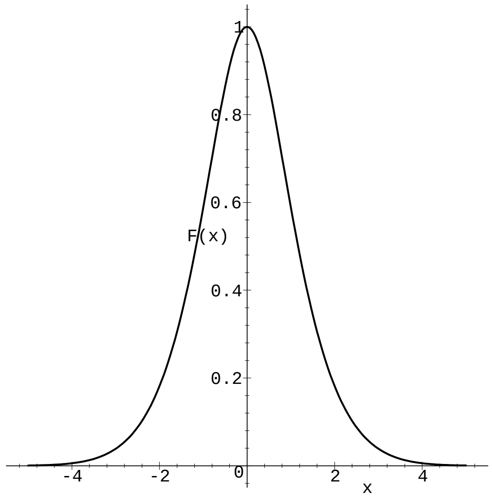
Der Beweis des Satzes basiert ebenfalls auf Standardergebnissen, die aufgrund der Einfachheit der Eigenwerte anwendbar sind.
Da in diesem Fall Lösungszweige existieren, läßt sich auch die Stabilität gut untersuchen. Dazu wählt man den Störungsansatz $Q(x, t) = (F(x, t) + G(x, t)) \exp(ikt)$, wobei F Lösung von (6.9) sei. Da die Standardgleichung (6.3) invariant unter S^1 ist (genauer: Q Lösung $\Rightarrow e^{is}Q$ Lösung), kann Stabilität in diesem Fall nur orbitale Stabilität bedeuten. Es gilt nun

Satz 6.1.4. (Orbitale Stabilität)
Für festes $a > 0$, $k > k_0 = -\sqrt{a/2}$ und k nahe bei k_0 sind die verzweigenden Lösungen F_k orbital stabil.

Die verzweigenden Lösungen haben dabei die folgende Gestalt: Man erkennt, daß diese sehr schnell abklingen und die Form einer Solitone haben, ganz so wie wir uns die Signalausbreitung vorgestellt haben. Aus diesen Gründen erscheinen die Betrachtungen sinnvoll, und die Gleichung beschreibt die Realität sehr gut.

6.1.2. Der Fall $a < 0$

Im Fall $a < 0$ findet man in der Literatur keine brauchbaren Ergebnisse. Numerische Untersuchungen liefern jedoch folgende Gestalt der Lösungen:



H

Abbildung 6.1.: Die Gestalt der Lösungen im Fall $a > 0$

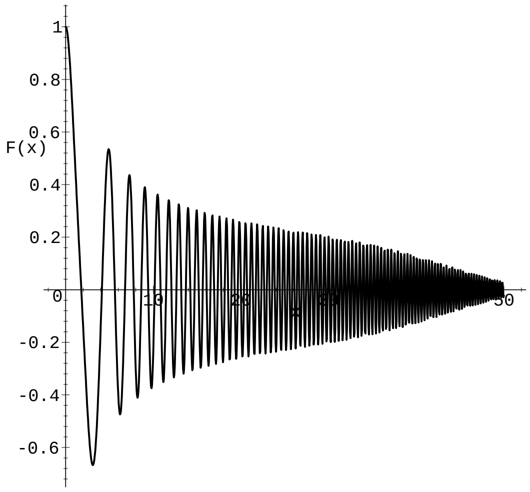


Abbildung 6.2.: Die Gestalt der Lösungen im Fall $a < 0$

Es scheint so, daß diese Lösungen in L^2 liegen, was zu der Annahme führt, daß auch bei dieser Gleichung Verzweigung auftritt. Um dies zu untersuchen, müßte man sich zunächst Klarheit über das Spektrum der Linearisierung verschaffen. Mit Hinblick auf die

Anwendungen, die im vorherigen Kapitel beschrieben wurden, scheint es sehr interessant, dieses Problem genauer zu untersuchen.

6.2. Die NLS mit periodischem Potential

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, daß die gemittelte NLS sich im Falle des Einsatzes von Verstärkern und Phasenmodulatoren wie folgt schreibt :

$$i\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \tau^2} + \nu\sigma|Q_0|^2 Q_0 = \pm\Phi\frac{\cos(\omega_m \tau)}{L_A}Q_0 \tag{6.16}$$

Wir wollen nun analog zum letzten Abschnitt diese Gleichung auf eine Standardform bringen, dazu benutzen wir folgende Substitutionen:

$$x := \omega_m \tau, \quad t = -\frac{\omega_m^2 k_1''}{2}\xi. \tag{6.17}$$

Dabei wollen wir abermals davon ausgehen, daß wir uns im Bereich anomaler Dispersion befinden ($k_1'' < 0$). Mit

$$Q_0(\xi, \tau) = \omega_m \sqrt{\frac{|k_1''|}{2\nu\sigma}} A(t, x) \tag{6.18}$$

gilt dann

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + |A|^2 A = a\cos(x)A, \tag{6.19}$$

wobei der Parameter a wie folgt definiert ist:

$$a := \pm 2\frac{\Phi}{L_A \omega_m^2 k_1''}. \tag{6.20}$$

Ausgehend von dieser Gleichung wählen wir wie im vorigen Abschnitt den Ansatz

$$A(x, t) = F(x)\exp(ikt) \tag{6.21}$$

und erhalten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + |F|^2 F - a\cos(x)F = kF. \tag{6.22}$$

Um mathematischen Konventionen zu folgen, schreiben wir diese Gleichung mit $k = -\lambda$ und $p(x) = a\cos(x)$ unter Identifizierung von u mit F in folgender Form

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x)u - |u|^2 u = \lambda u \tag{6.23}$$

Lösungen dieser Gleichung sollen in $H^2(\mathbb{R})$ liegen, die zusätzliche Integralbedingung des letzten Abschnitts entfällt, da wegen $p \in L^\infty(\mathbb{R})$ auch $pu \in L^\infty(\mathbb{R})$ ist.
Gleichung (6.23) wird in der Literatur auch als Hillsche Gleichung bezeichnet, das Spektrum der Linearisierung ist wohlbekannt. In ihm liegen keine Eigenwerte, und es besteht aus einer Vereinigung abgeschlossener Intervalle (vgl. [29]).

Bei der Frage, ob und wo Verzweigung auftritt, hilft uns folgender Satz, der von Buffoni und Jeanjean [26] in folgender Version bewiesen wurde:

Satz 6.2.1. (Buffoni, Jeanjean)

Die Gleichung

$$-\triangle u(x) + p(x)u(x) - r(x)|u(x)|^\sigma u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.24}$$

erfülle folgende Bedingungen:

(B_1) $p \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $p(x+a_i) = p(x)$ *fast überall in* $\mathbb{R}^N, span\{a_i, 1 \le i \le N\} = \mathbb{R}^N$

(B_2) $r(x) = r \ge 0$ *fast überall in* $\mathbb{R}^N$, $p(x) \ge 0$ *fast überall in* $\mathbb{R}^N$

(B_3) $0 < \sigma < \dfrac{4}{N}$ *für* $N \ge 1$.

Nun sei $Su = -\triangle u + pu$ *der in* $H^2(\mathbb{R}^N)$ *selbstadjungierte, positive Operator der Linearisierung. Weiter sei* l *ein linker Randpunkt des Spektrums von* S*, genauer* $l \in \sigma(S)$ *mit* $]\, l-\epsilon, l\, [\ \cap\ \sigma(S) = \emptyset$ *für ein geeignetes* $\epsilon > 0$.

Dann gilt:

l *ist ein Verzweigungspunkt, und die Verzweigung erfolgt in die Lücke des wesentlichen Spektrums.*

Dabei bedeutet Verzweigung in die Lücke des wesentlichen Spektrums, daß eine Folge von Lösungen $(\lambda_n, u_n) \in]l-\epsilon, l[\times H^1$ existiert, für die gilt $u_n \neq 0$ und $(\lambda_n, u_n) \to (l, 0)$. Dieser Satz ist eine Anwendung des allgemeinen Ergebnisses dieser Arbeit, in der Verzweigung für ein allgemeines Problem der Form $Su \pm N(u) = \lambda u$ untersucht wird. In Abschnitt 3 findet man dann die Anwendung auf die NLS mit periodischem Potential.

Bemerkung 6.2.2. *Das Ergebnis von Buffoni und Jeanjean ist eine Weiterentwicklung von Artikeln von Küpper und Stuart [27, 28]. In diesen Arbeiten war eine wichtige Voraussetzung, daß die Nichtlinearität kompakt ist. Im Falle* $N(u) = r(x)|u|^2u$ *entspricht dies der Forderung* $r(x) \to 0$ *für* $|x| \to \infty$*. Der Beweis in [26] basiert auf dem von Küpper und Stuart, nur die Kompaktheit wird durch eine allgemeinere Voraussetzung ersetzt, die in einem gewissen Sinne die Konvergenz von Minimalfolgen sichert.*

Man erkennt, daß sich Satz 6.2.1 auf unsere Gleichung (6.23) anwenden läßt. (6.23) ist eine skalare Gleichung, also gilt $N = 1$, und mit $\sigma = 2$ ist (B_3) erfüllt. Ebenso leicht sieht man, daß (B_1) erfüllt ist, da $p(x) = a\cos(x)$ periodisch ist. Der erste Teil von (B_2) ist wegen $r(x) \equiv 1$ erfüllt. Um den zweiten Teil von (B_3) zu erfüllen, muß die Gleichung nur noch verschoben werden, dies ist von rein technischer Natur und soll nun geschehen:

Bekanntermaßen gilt:

$$p(x) = a\cos(x) \ge -|a| \tag{6.25}$$

Sei nun also $c := |a|$, sowie $\tilde{p}(x) = p(x) + c$ und $\tilde{\lambda} = \lambda + c$. Dann gilt $\tilde{p}(x) \ge 0$, und (6.23) ist äquivalent zu

$$-u_{xx} + \tilde{p}(x)u - |u|u = \tilde{\lambda}u. \tag{6.26}$$

Für Gleichung (6.26) sind die Voraussetzungen $(B_1), (B_2)$ und (B_3) nun erfüllt, und der Satz von Buffoni und Jeanjean läßt sich anwenden. Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen:

Satz 6.2.3. (Verzweigungsresultat für die NLS mit periodischem Potential)

Das Intervall $[l, r]$ sei ein Spektralblock des selbstadjungierten, positiven Operators $Su := -u_{xx} + \tilde{p}(x)u$.

Dann gilt:

l ist ein Verzweigungspunkt und die Verzweigung erfolgt in die Lücke des wesentlichen Spektrums.

Hierbei sei mit einem Spektralblock ein Intervall $[l, r] \in \sigma(S)$ bezeichnet für das ein $\epsilon > 0$ mit $[l - \epsilon, r + \epsilon] \cap \sigma(S) = [l, r]$ existiert.
Dieses Ergebnis überträgt sich direkt auf (6.23), nur das Spektrum und somit auch die Verzweigungspunkte wurden um $|a|$ verschoben.
Das zugehörige Verzweigungsdiagramm wird in folgendem Diagramm skizziert :

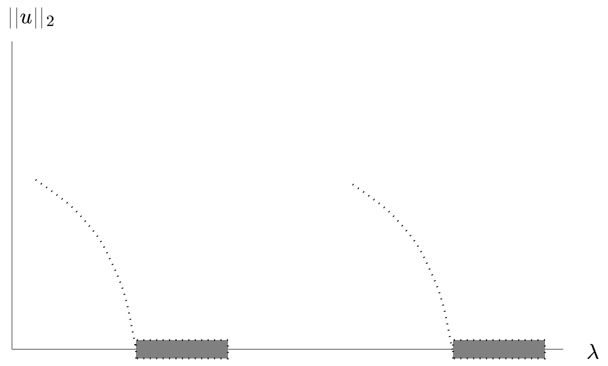


Abbildung 6.3.: Skizze des zu (6.26) gehörigen Verzweigungsdiagramms

Wie bereits erwähnt, läßt sich mit diesem Resultat die Existenz von Zweigen nicht sichern. Dies wäre jedoch wichtig, um Stabilitätsuntersuchungen durchzuführen. Mit Hilfe des Ergebnisses von Buffoni und Jeanjean ist keine Aussage über die Stabilität der verzweigenden Lösungen möglich. Ein interessanter Ansatz wäre, das Spektrum durch ein zusätliches Potential $\epsilon V(x)$ derart zu stören, daß Eigenwerte entstehen, die für $\epsilon \to 0$ gegen den Rand des wesentlichen Spektrums konvergieren. Wenn man beweisen könnte, daß in ihnen Lösungszweige entstehen, die beim Grenzübergang erhalten bleiben, wäre das Problem gelöst. Dieser Ansatz wird von A.Plate [30] für das Problem $-u'' - r(x)|u|^\sigma u = \lambda u$ verfolgt. Wie und ob dieses Verfahren auf obiges Problem umgesetzt werden kann, ist jedoch nicht bekannt.

A. Alternative Herleitung der NLS

In diesem Abschnitt soll kurz die Methode vorgestellt werden, mit der die NLS im Buch von Newell und Moloney [6] hergeleitet wird. Mit Hilfe dieses „multiple scale“-Ansatzes erkennt man, daß die Substitution (3.10) zwingend ist. Andererseits ist die Herleitung der HNLS mit dieser Methode unmöglich, daher wurde der Weg von Kodama und Hasegawa in dieser Arbeit gewählt.

Ausgangspunkt ist auch hier die direkt aus den Maxwellschen Gleichung gefolgerte Gleichung (3.12):

$$\triangle E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_L(E)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_{NL}(E)}{\partial t^2}. \tag{A.1}$$

Die Annahmen, die der Herleitung zugrunde liegen, sind dieselben wie bei der Methode von Hasegawa und Kodama. Wir wollen auch hier annehmen, daß sich das elektrische Feld in Potenzen von ϵ entwickeln läßt, genauer

$$E(x_\perp, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1} E_n(x_\perp, z, t; \epsilon). \tag{A.2}$$

In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß die Effekte, die von Frequenzanteilen der Form $l\omega_1$ mit $l \neq \pm 1$ stammen, vernachlässigbar sind. Daher wollen wir jetzt vereinfachend annehmen, daß die Felder E_n von der Form $E_n^{(1)}(x_\perp, z, t)\exp(i(k_1 z - \omega_1 t)) + (c.c.)$ sind. Wegen der Reellwertigkeit des elektrischen Feldes betrachten wir abermals nur den Fall $l = 1$ und schreiben zur Vereinfachung $E_n = E_n^{(1)}$.
Nun skalieren wir die Orts- und Zeitvariable in folgender Form

$$T = \epsilon t, \quad Z = \epsilon z. \tag{A.3}$$

In diesem Fall schreibt sich der lineare Anteil bei Anwendung auf das Wellenpaket E_n mit Hilfe des bekannten Operators L als

$$\epsilon^{n+1} L(k_1 + i\epsilon\frac{\partial}{\partial Z}, \omega_1 + i\epsilon\frac{\partial}{\partial T})E_n. \tag{A.4}$$

Der nichtlineare Anteil ist auch hier von der Ordnung ϵ^3 und analog zu Kapitel 3 definiert. In erster Näherung ergibt sich nun wieder die Gleichung $L_1 E_0 := L(k_1, \omega_1)E_0 = 0$, deren Lösung durch

$$E_0(x_\perp, Z, T) = A(Z, T)U(x_\perp, \omega_1) \tag{A.5}$$

gegeben ist. Die Variable Z wird nun gemäß des „multiple scale"-Ansatzes in $Z_n = \epsilon^n z = \epsilon^{n-1} Z$ aufgespalten. Damit gilt dann

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial A}{\partial Z_1} + \epsilon \frac{\partial A}{\partial Z_2} + \epsilon^2 \frac{\partial A}{\partial Z_3} + \cdots \tag{A.6}$$

Daher enthält A auch Anteile von höherer Ordnung in ϵ. In der Ordnung ϵ^2 ergibt sich dann folgende Situation

$$L_1 E_1 + i(\frac{\partial L}{\partial k}\frac{\partial A_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial L_1}{\partial \omega}\frac{\partial A_1}{\partial T})U = 0. \tag{A.7}$$

Die zugehörige Kompatibilitätsbedingung findet man direkt als

$$\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k} U \right\rangle \frac{\partial A}{\partial Z_1} + \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial \omega} U \right\rangle \frac{\partial A}{\partial T} = 0, \tag{A.8}$$

und aufgrund der Dispersionsbeziehung folgt

$$\frac{\partial A}{\partial Z_1} + k_1' \frac{\partial A}{\partial T} = 0, \tag{A.9}$$

die bereits in Abschnitt 3.2 gefundene Tatsache, daß sich eine Welle mit Gruppengeschwindigkeit bewegt. Dies in (A.7) eingesetzt liefert als Lösung

$$E_1 = i \frac{dU}{d\omega}\frac{\partial A}{\partial T}. \tag{A.10}$$

Nun folgt der Koeffizientenvergleich in der Ordnung ϵ^3, dieser soll hier jedoch nicht mehr genau dargestellt werden. Die Nichtlinearität taucht hier erstmals auf, nach längerer Rechnung erhalten wir aus der Kompatibilitätsbedingung

$$i \frac{\partial A}{\partial Z_2} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \nu \left|A\right|^2 A = 0. \tag{A.11}$$

Insgesamt folgt dann

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} = i \frac{\partial A}{\partial Z_1} + i\epsilon \frac{\partial A}{\partial Z_2} = -ik_1' \frac{\partial A}{\partial T} + \epsilon \left(\frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \nu \left|A\right|^2 A = 0 \right). \tag{A.12}$$

Um diese Gleichung auf eine Standardform zu transformieren, führen wir neue Koordinaten gemäß

$$\tau = T - k_1' Z = \epsilon(t - k_1' z), \qquad \xi = \epsilon Z = \epsilon^2 z \tag{A.13}$$

ein und erhalten die NLS

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \nu \left|A\right|^2 A = 0. \tag{A.14}$$

Wir haben also erkannt, daß die Koordinatentransformation aus Kapitel 3 sinnvoll ist.

B. Die Kompatibilitätsbedingung in der Ordnung ϵ^4

B.1. Beweis von Satz 3.2.8

In diesem Abschnitt wird Satz 3.2.8 bewiesen. Die Rechnungen werden wesentlich aufwendiger, da in der Gleichung für $E_1^{(3)}$ sowie für $E_1^{(4)}$ die Nichtlinearität auftaucht. Das Beweisverfahren verläuft allerdings analog zum Beweis von Satz 3.2.1, dem entsprechenden Satz in der Ordnung ϵ^3.

Zu beweisen ist in diesem Abschnitt also:

Satz 3.2.8 (Kompatibilitätsbedingung in der Ordnung ϵ^4)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle U, L_1 E_1^{(4)} \Big\rangle \\
=\ &\Big\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \Big\rangle \Big(i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k_1'' \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} k_1''' \frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3} + i \frac{\partial \nu}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (|A_1|^2 A_1) \Big) \\
&- 2 |A_1|^2 A_2 \Big\langle U, F(U) \Big\rangle - A_1^2 \bar{A}_2 \Big\langle U, F(U) \Big\rangle \\
&+ i \Big\langle U, G(U) \Big\rangle A_1 \frac{\partial |A_1|^2}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 3.2.8. Aufgrund der Gleichung für $E_1^{(4)}$ (vgl. (3.78) und (3.79)) müssen wir nun folgenden Ausdruck betrachten:

$$\begin{aligned}
\Big\langle U, L_1 E_1^{(4)} \Big\rangle =& \Big\langle U, -i \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6} \frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \Big\rangle && (1) \\
&+ \Big\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} (i \frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k_1'' \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} k''' \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3}) \Big\rangle && (2) \\
&+ i \Big\langle U, \frac{d}{d\omega_1} \Big(\frac{\partial L_1}{\partial k_1} \Big) \frac{\partial}{\partial \tau} (i \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2}) \Big\rangle && (3) \\
&- \sum_{l_1+l_2+l_3=1} \sum_{i+j+k=4} \Big\langle U, N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3}) (E_{l_1}^{(i)} \cdot E_{l_2}^{(j)}) E_{l_3}^{(k)} \Big\rangle && (4) \\
&- i \sum_{l_1+l_2+l_3=1} \sum_{k=1}^{3} \Big\langle U, \frac{\partial N}{\partial \omega_{l_k}} (\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3}) \frac{\partial}{\partial \tau_{l_k}} (E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)}) E_{l_3}^{(1)} \Big\rangle && (5)
\end{aligned}$$

Um die Lesbarkeit dieses Beweises zu verbessern, werden die einzelnen Rechenschritte zu Lemmata zusammengefaßt, die im nächsten Abschnitt bewiesen werden.

Wir wollen uns zunächst mit (1) beschäftigen und behaupten

Lemma B.1.1. (1.Term)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}\right\rangle$$
$$= -i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right\rangle$$
$$- i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right)\right\rangle + i\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\left|A_1\right|^2 A_1\right)\right\rangle$$

In den ersten Näherungen ist der entsprechende Term jeweils verschwunden. Aufgrund der komplizierteren Gestalt der Gleichung für $E_1^{(3)}$ ist dies hier aber nicht der Fall. Wir erkennen aber, daß sich (3) und der erste Summand aus Lemma B.1.1 aufheben.
Durch Einsetzen der Formeln für $E_1^{(1)}$ und $E_1^{(2)}$ erhält man direkt folgende Vereinfachung von (2):

Lemma B.1.2. (2.Term)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3})\right\rangle$$
$$= \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle(i\frac{\partial A_2}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial\tau^3}) + i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{dU}{d\omega_1}\right\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}\left(i\frac{\partial A_1}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau^2}\right)$$
$$+ i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right\rangle$$

Jetzt können wir (1) + (2) + (3) berechnen. Dabei sei daran erinnert, daß sich (3) und der erste Summand aus Lemma B.1.1 aufheben. In den beiden anderen Summanden werden abermals die Darstellungsformeln von $E_1^{(1)}$ und $E_1^{(2)}$ eingesetzt. Mit dem folgendem Lemma ist die Hauptarbeit bereits getan. Die in A_1 bzw. A_2 linearen Glieder der späteren Gleichung sind bereits gefunden. Der Rest des Beweises befaßt sich nur noch mit den nichtlinearen Termen, wobei die zugehörigen Rechnungen einfach, aber sehr umfangreich sind.

Durch geeignetes Zusammenfassen der ersten 3 Terme erhalten wir nun

Lemma B.1.3. (Addition der ersten 3 Terme)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}\right\rangle\\
&+\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3})\right\rangle\\
&+i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right\rangle\\
&=\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle\left(\frac{\partial A_2}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1)\right)\\
&+i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1)
\end{aligned}$$

Der erste Summand findet sich in der Behauptung des Satzes wieder. Zu zeigen bleibt also

$$\begin{aligned}
&i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1) - \sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{i+j+k=4}\left\langle U, N(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)}\cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)}\right\rangle\\
&-i\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{k=1}^{3}\left\langle U, \frac{\partial N}{\partial\omega_{l_k}}(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial\tau_{l_k}}(E_{l_1}^{(1)}\cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)}\right\rangle\\
&=i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1) - 2|A_1|^2 A_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle - A_1^2\bar{A}_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle\\
&\quad + i\Big\langle U, G(U)\Big\rangle A_1\frac{\partial|A_1|^2}{\partial\tau}.
\end{aligned}$$

Dazu wird zunächst (4) berechnet:

Lemma B.1.4. (4.Term)
Es gilt folgende Beziehung:.

$$\begin{aligned}
&-\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{i+j+k=4}\left\langle U, N(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)}\cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)}\right\rangle\\
&\quad= i\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial\tau}A_1^2\left\langle U, N_{-111}(\dot{\bar{U}}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\dot{\bar{U}}) + N_{11-1}(U\cdot U)\dot{\bar{U}}\right\rangle\\
&\quad - i|A_1|^2\frac{\partial A_1}{\partial\tau}\left\langle U, N_{-111}\left((\bar{U}\cdot\dot{U})U + (\bar{U}\cdot U)\dot{U}\right) + N_{1-11}\left((U\cdot\bar{U})\dot{U} + (\dot{U}\cdot\bar{U})U\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left. + N_{11-1}\left((U\cdot\dot{U})\bar{U} + (\dot{U}\cdot U)\bar{U}\right)\right\rangle\\
&\quad - 2|A_1|^2 A_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle - A_1^2\bar{A}_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden tauchen bereits in der Behauptung des Satzes auf.

Nun untersuchen wir (5):

Lemma B.1.5. (5.Term)
Es gilt folgende Beziehung:

$$
\begin{aligned}
&-i\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{k=1}^{3}\Big\langle U, \frac{\partial N}{\partial \omega_{l_k}}(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial \tau_{l_k}}(E^{(1)}_{l_1}\cdot E^{(1)}_{l_2})E^{(1)}_{l_3}\Big\rangle \\
=&-i\Big\langle U, N_{-\mathrm{i}11}(\bar U\cdot U)U + N_{1-\mathrm{i}1}(U\cdot\bar U)U + N_{11-\mathrm{i}}(U\cdot U)\bar U\Big\rangle\frac{\partial \bar A_1}{\partial\tau}A_1^2 \\
&-i\Big\langle U, N_{-11\mathrm{i}}(\bar U\cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar U\cdot U)U + N_{\mathrm{i}-11}(U\cdot\bar U)U + N_{1-1\mathrm{i}}(U\cdot\bar U)U \\
&\qquad N_{\mathrm{i}1-1}(U\cdot U)\bar U + N_{1\mathrm{i}-1}(U\cdot U)\bar U\Big\rangle\frac{\partial A_1}{\partial\tau}\left|A_1\right|^2
\end{aligned}
$$

Wir fassen die Ergebnisse von Lemma B.1.4 und Lemma B.1.5 zusammen. Demnach genügt es nun zu zeigen, daß folgendes Lemma gilt:

Lemma B.1.6. (Zusammenfassung der Nichtlinearitäten)
Es gilt folgende Beziehung:

$$
\begin{aligned}
&i\Big\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right)\Big\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}(\left|A_1\right|^2 A_1) \\
&+i\frac{\partial\bar A_1}{\partial\tau}A_1^2\Big\langle U, N_{-111}(\dot{\bar U}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\dot{\bar U}) + N_{11-1}(U\cdot U)\dot{\bar U} \\
&\qquad - N_{-\mathrm{i}11}(\bar U\cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U\cdot\bar U)U - N_{11-\mathrm{i}}(U\cdot U)\bar U\Big\rangle \\
&-i\left|A_1\right|^2\frac{\partial A_1}{\partial\tau}\Big\langle U, N_{-111}(\bar U\cdot\dot U)U + N_{-111}(\bar U\cdot U)\dot U + N_{1-11}(U\cdot\bar U)\dot U + N_{1-11}(\dot U\cdot\bar U)U \\
&\qquad + N_{11-1}(U\cdot\dot U)\bar U + N_{11-1}(\dot U\cdot U)\bar U + N_{-11\mathrm{i}}(\bar U\cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar U\cdot U)U \\
&\qquad + N_{\mathrm{i}-11}(U\cdot\bar U)U + N_{1-1\mathrm{i}}(U\cdot\bar U)U + N_{\mathrm{i}1-1}(U\cdot U)\bar U + N_{1\mathrm{i}-1}(U\cdot U)\bar U\Big\rangle \\
=&i\Big\langle U, G(U)\Big\rangle A_1\frac{\partial\left|A_1\right|^2}{\partial\tau}
\end{aligned}
$$

Der Beweis wird ebenfalls im nächsten Abschnitt geführt, indem $\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right)$ berechnet wird. Durch geeignetes Zusammenfassen unter Benutzung der Definition von $G(U)$ folgt dann die Behauptung, und der Satz ist bewiesen. □

B.2. Beweis der Lemmata

In diesem Abschnitt werden die Lemmata dieses Kapitels bewiesen und somit der Beweis von Satz 3.2.8 vervollständigt. Zunächst befassen wir uns aber mit dem dritten Koeffizienten in der Taylorentwicklung von $\tilde L_1$:

Lemma 3.2.7 (Berechnung von $\tilde{L_1}'''(0)$)

$$
\tilde{L_1}'''(0) = -i\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial L_1}{\partial k_1}k_1'''\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 6i\frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1})\frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi})
$$

Beweis. Durch Differenzieren von (3.58) erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{L_1}'''(0) = & - i(\frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1^2 \partial\omega_1} 3{k'_1}^2 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1^2} 3k'_1 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1^3} {k'_1}^3 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial\omega_1^3}) \frac{\partial^3}{\partial^3 \tau^3} \\ & + 6(\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} k'_1) \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial\xi}.\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} = \frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1^2 \partial\omega_1} 3{k'_1}^2 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1^2} 3k'_1 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial k_1^3} {k'_1}^3 + \frac{\partial^3 L_1}{\partial\omega_1^3} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} 3k'_1 k''_1 + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} 3k''_1 + \frac{\partial L_1}{\partial k_1} k'''_1$$

und

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} k'_1 = \frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1})$$

folgt

$$\begin{aligned}\tilde{L_1}'''(0) = & - i\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + i(\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} 3k'_1 k''_1 + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} 3k''_1 + \frac{\partial L_1}{\partial k_1} k'''_1) \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} \\ & + 3i(\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} k''_1 + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} k''_1 k'_1) \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 6(\frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} k'_1) \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial\xi}.\end{aligned}$$

Um den zweiten Summanden zu vereinfachen, benutzen wir nun

$$\frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}) = \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1^2} k'_1 + \frac{\partial^2 L_1}{\partial k_1 \partial\omega_1}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{L_1}'''(0) = & - i\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 3i\frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}) k''_1 \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial L_1}{\partial k_1} k'''_1 \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 6\frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}) \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ = & - i\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial L_1}{\partial k_1} k'''_1 \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + 6i\frac{d}{d\omega_1}(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}) \frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{1}{2} k''_1 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi}),\end{aligned}$$

was nachzurechnen war. □

Jetzt wenden wir uns den Lemmata aus dem Beweis von Satz 3.2.8 zu. Das erste Lemma lautete:

Lemma B.1.1 (1.Term)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}& \left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6} \frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3} \right\rangle \\ = & - i \left\langle U, \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} (i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k''_1}{2} \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2}) \right\rangle \\ & - i \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} (i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k''_1}{2} \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2}) \right) \right\rangle + i\frac{\partial}{\partial\tau} \left\langle U, \frac{d}{d\omega_1} \left(F(U) \left|A_1\right|^2 A_1\right) \right\rangle\end{aligned}$$

Beweis. Zu untersuchen ist folgender Ausdruck:

$$-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2}+\frac{i}{6}\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}=:(1)+(2)+(3)$$

Die Beweistechnik ist die gleiche wie im Beweis von Satz 3.2.1. Wir starten mit dem ersten Summanden

$$(1)=-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau}=-i\frac{\partial}{\partial\tau}(\frac{d}{d\omega_1}\left(L_1E_1^{(3)}\right)-L_1\frac{d}{d\omega_1}\left(E_1^{(3)}\right))=:(1.1)+(1.2).$$

Unter Benutzung von

$$\begin{aligned}L_1E_1^{(3)}=&-i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2}+\left[i\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\frac{\partial L_1}{\partial k_1}E_1^{(1)}\\&-F(U)\left|A_1\right|^2A_1\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}(1.1)=&-i\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{d}{d\omega_1}\left(L_1E_1^{(3)}\right)\\=&-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{dL_1}{d\omega_1}E_1^{(2)}\right)-\frac{i}{2}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}E_1^{(1)}\right)\\&-i\frac{\partial}{\partial\tau}\left[i\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}E_1^{(1)}\right)\\&+i\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\left|A_1\right|^2A_1\right)\\=&:(1.1.1)+(1.1.2)+(1.1.3)+(1.1.4).\end{aligned}$$

Wir betrachten den ersten Term

$$(1.1.1)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{dL_1}{d\omega_1}E_1^{(2)}\right)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}E_1^{(2)}+\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(E_1^{(2)}\right)).$$

Nun wird der zweite Summand der ursprünglichen Gleichung addiert, nämlich

$$(2)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{dL_1}{d\omega_1}\left(E_1^{(2)}\right).$$

Es ergibt sich

$$(1.1.1)+(2)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(\frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}E_1^{(2)}+\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(E_1^{(2)}\right)).$$

Wegen $\frac{d^2}{d\omega^2}(L_1U)=0$ gilt nun

$$\begin{aligned}(1.1.1)+(2)=&-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\omega_1^2}\left(L_1E_1^{(2)}\right)-\frac{1}{2}L_1\frac{d^2}{d\omega_1^2}\left(E_1^{(2)}\right))\\=&(2.1)+(2.2).\end{aligned}$$

Der zweite Teil wird bei Anwendung des Skalarprodukts wegfallen. Wegen

$$L_1 E_1^{(2)} = -i \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \tau}$$

vereinfacht sich der erste Term zu

$$(2.1) = \frac{i}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \frac{d^2}{d\omega_1^2} \left(\frac{dL_1}{d\omega_1} E_1^{(1)} \right) = \frac{i}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} (\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} E_1^{(1)} + 2 \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(1)} \right) + \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{d^2}{d\omega_1^2} \left(E_1^{(1)} \right)).$$

Wir müssen noch

$$(1.1.2) = -\frac{i}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} E_1^{(1)} \right) = -\frac{i}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} (\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} E_1^{(1)} + \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(1)} \right))$$

mit einbeziehen. Addition führt auf

$$(2.1) + (1.1.2) = \frac{i}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} (\frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(1)} \right) + \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{d^2}{d\omega_1^2} \left(E_1^{(1)} \right)).$$

Es fehlt noch

$$(3) = \frac{i}{6} \frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3}.$$

Zusammen ergibt das

$$(2.1) + (1.1.2) + (3) = \frac{i}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} (\frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} E_1^{(1)} + 3 \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(1)} \right) + 3 \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{d^2}{d\omega_1^2} \left(E_1^{(1)} \right)),$$

und dies ist nach Produktregel

$$-\frac{i}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} L_1 \frac{d^3}{d\omega_1^3} \left(E_1^{(1)} \right).$$

Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} & i \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6} \frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \\ =& i \frac{\partial}{\partial \tau} L_1 \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(3)} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} L_1 \frac{d^2}{d\omega_1^2} \left(E_1^{(2)} \right) - \frac{i}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} L_1 \frac{d^3}{d\omega_1^3} \left(E_1^{(1)} \right) \\ & - i \frac{\partial}{\partial \tau} \left[i \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1} E_1^{(1)} \right) + i \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d}{d\omega_1} \left(F(U) \left| A_1 \right|^2 A_1 \right). \end{aligned}$$

Nun kann das Skalarprodukt mit U genommen werden, die ersten drei Summanden verschwinden, da L_1 selbstadjungiert ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} & \left\langle U, i \frac{dL_1}{d\omega_1} \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 L_1}{d\omega_1^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6} \frac{d^3 L_1}{d\omega_1^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \right\rangle \\ =& - i \frac{\partial}{\partial \tau} \left[i \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \left\langle U, \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1} \right) E_1^{(1)} \right\rangle \\ & - i \frac{\partial}{\partial \tau} \left[i \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{k_1''}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} \frac{d}{d\omega_1} \left(E_1^{(1)} \right) \right\rangle + i \frac{\partial}{\partial \tau} \left\langle U, \frac{d}{d\omega_1} \left(F(U) \left| A_1 \right|^2 A_1 \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Lemma B.1.2 folgt direkt durch Einsetzen der Formeln für $E_1^{(1)}$ und $E_1^{(1)}$; wir wenden uns dem nächsten Lemma zu:

Lemma B.1.3 (Addition der ersten 3 Terme).

Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}\right\rangle \\
&+\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3})\right\rangle \\
&+i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right\rangle \\
&=\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle\left(\frac{\partial A_2}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial\tau^3} + i\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1)\right) \\
&+i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}(|A_1|^2 A_1)
\end{aligned}$$

Beweis. Aufgrund von Lemma B.1.1 gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\langle U, -i\frac{dL_1}{d\omega_1}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{d^2L_1}{d\omega_1^2}\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} + \frac{i}{6}\frac{d^3L_1}{d\omega_1^3}\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3}\right\rangle \\
&= -i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right\rangle \\
&\quad - i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right)\right\rangle + i\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\,|A_1|^2 A_1\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

Dies wird nun eingesetzt, der erste Term dieser Gleichung und der dritte Summand aus Lemma B.1.3 heben sich auf. Demnach vereinfacht sich die Addition der ersten drei Summanden zu

$$\begin{aligned}
&- i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial\tau^2})\right)\right\rangle + i\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\,|A_1|^2 A_1\right)\right\rangle \\
&+\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}(i\frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial\tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial\tau^3})\right\rangle \\
&= (1) + (2) + (3).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen (1), Einsetzen von $E_1 = A_1 U$ liefert

$$\begin{aligned}
(1) = &- i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{dU}{d\omega_1}\right\rangle\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial A_1}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau^2}) \\
&- i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(i\frac{\partial A_1}{\partial\xi} - \frac{k_1''}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau^2})\right) = (1.1) + (1.2).
\end{aligned}$$

Weiter gilt durch Einsetzen in (3):

$$(3) = \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1} U \right\rangle (i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3}) + i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}\frac{dU}{d\omega_1}\right\rangle \frac{\partial}{\partial \tau}(i\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2})$$
$$=: (3.1) + (3.2).$$

Man erkennt (1.1) + (3.2) = 0, und (3.1) taucht bereits auf der rechten Seite der Behauptung von Lemma B.1.3 auf. Nun wird (2) untersucht:

$$\begin{aligned}(2) =& i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle \frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) + i\Big\langle U, F(U)\Big\rangle \frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1)\right)\\ =& i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle \frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) - i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle \nu\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1)\right)\\ =&: (2.1) + (2.2)\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Definition von ν ausgenutzt. Wir benutzen nun in (1.2) die NLS und erhalten

$$\begin{aligned}(1.2) =& -i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle \frac{d}{d\omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(-\nu |A_1|^2 A_1\right)\\ =& i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle \frac{d\nu}{d\omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) + i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle \nu\frac{d}{d\omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1)\right)\\ =&: (1.2.1) + (1.2.2).\end{aligned}$$

Nun erkennt man, daß (2.2) und (1.2.2) sich gegenseitig aufheben. Damit gilt nun insgesamt

$$\begin{aligned}(1) + (2) + (3) =& (3.1) + (2.1) + (1.2.1)\\ =& \left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle (i\frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2}k_1''\frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6}k_1'''\frac{\partial^3 A_1}{\partial \tau^3})\\ &+ i\left\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\right\rangle \frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1) + i\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle \frac{d\nu}{d\omega_1}\frac{\partial}{\partial \tau}(|A_1|^2 A_1),\end{aligned}$$

und durch Ausklammern von $\left\langle U, \frac{\partial L_1}{\partial k_1}U\right\rangle$ erhält man die gewünschte Form. □

Wir müssen nun die beiden nächsten Lemmata beweisen, die sich mit der Nichtlinearität befassen. Zunächst zeigen wir:

Lemma B.1.4 (4.Term)

Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}&-\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{i+j+k=4}\left\langle U, N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)} \cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)}\right\rangle\\ &= i\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2\left\langle U, N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}}) + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}}\right\rangle\\ &- i|A_1|^2\frac{\partial A_1}{\partial \tau}\left\langle U, N_{-111}\left((\bar{U} \cdot \dot{U})U + (\bar{U} \cdot U)\dot{U}\right) + N_{1-11}\left((U \cdot \bar{U})\dot{U} + (\dot{U} \cdot \bar{U})U\right)\right.\\ &\qquad\qquad \left. + N_{11-1}\left((U \cdot \dot{U})\bar{U} + (\dot{U} \cdot U)\bar{U}\right)\right\rangle\\ &- 2|A_1|^2 A_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle - A_1^2\bar{A}_2\Big\langle U, F(U)\Big\rangle\end{aligned}$$

Hierbei sei an die Definitionen

$$N_{lmn} := N(\omega_l, \omega_m, \omega_n) \text{ und } \dot{U} := \frac{dU}{d\omega_1}$$

erinnert.

Beweis. Zu untersuchen ist

$$\sum_{l_1+l_2+l_3=1} \sum_{i+j+k=4} \left\langle U, N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)} \cdot E_{l_2}^{(j)}) E_{l_3}^{(k)} \right\rangle$$
$$= \sum_{l_1+l_2+l_3=1} \left\langle U, N(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3}) \left((E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)}) E_{l_3}^{(2)} + (E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(2)}) E_{l_3}^{(1)} + (E_{l_1}^{(2)} \cdot E_{l_2}^{(1)}) E_{l_3}^{(1)} \right) \right\rangle .$$

Da $E_l^{(1)} = 0$ und $E_l^{(2)} = 0$ für $l \neq \pm 1$, wird nur über Permutationen des Tripels $(l_1, l_2, l_3) = (-1, 1, 1)$ summiert. Demnach besteht die Summe aus 9 Summanden. Zunächst wird der Fall $(l_1, l_2, l_3) = (-1, 1, 1)$ betrachtet, der zugehörige Summand ist

$$\left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1) \left((E_{-1}^{(1)} \cdot E_1^{(1)}) E_1^{(2)} + (E_{-1}^{(1)} \cdot E_1^{(2)}) E_1^{(1)} + (E_{-1}^{(2)} \cdot E_1^{(1)}) E_1^{(1)} \right) \right\rangle .$$

Einsetzen der Darstellungsformeln von $E_l^{(1)}$ und $E_l^{(2)}$ für $l = \pm 1$ liefert

$$\begin{aligned}
&\left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{A}_1 \bar{U} \cdot A_1 U)(i \frac{dU}{d\omega_1} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + A_2 U) \right\rangle \\
&+ \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{A}_1 \bar{U} \cdot (i \frac{dU}{d\omega_1} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + A_2 U)) A_1 U \right\rangle \\
&+ \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)((-i \frac{d\bar{U}}{d\omega_1} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau} + \bar{A}_2 \bar{U}) \cdot A_1 U) A_1 U \right\rangle \\
&= i \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{U} \cdot U) \frac{dU}{d\omega_1} \right\rangle \bar{A}_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{U} \cdot U) U \right\rangle \bar{A}_1 A_1 A_2 \\
&+ i \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{U} \cdot \frac{dU}{d\omega_1}) U \right\rangle \bar{A}_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} A_1 + \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{U} \cdot U) U \right\rangle \bar{A}_1 A_2 A_1 \\
&- i \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\frac{d\bar{U}}{d\omega_1} \cdot U) U \right\rangle \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau} A_1 A_1 + \left\langle U, N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)(\bar{U} \cdot U) \right\rangle \bar{A}_2 A_1 A_1 .
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen erhalten wir damit für den Summanden mit $(l_1, l_2, l_3) = (-1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned}
&-i \left\langle U, N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U) U \right\rangle \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau} A_1^2 + i \left\langle U, N_{-111} \left((\bar{U} \cdot U) \dot{U} + (\bar{U} \cdot \dot{U}) U \right) \right\rangle |A_1|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \\
&+ 2 \left\langle U, N_{-111}(\bar{U} \cdot U) U \right\rangle |A_1|^2 A_2 + \left\langle U, N_{-111}(\bar{U} \cdot U) \right\rangle \bar{A}_2 A_1^2 .
\end{aligned}$$

Analog lassen sich die anderen Summanden berechnen. Insgesamt ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&-\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{i+j+k=4}\left\langle U, N(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})(E_{l_1}^{(i)}\cdot E_{l_2}^{(j)})E_{l_3}^{(k)}\right\rangle\\
&= i\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial\tau}A_1^2\left\langle U, N_{-111}(\dot{\bar{U}}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\dot{\bar{U}}) + N_{11-1}(U\cdot U)\dot{\bar{U}}\right\rangle\\
&- i\left|A_1\right|^2\frac{\partial A_1}{\partial\tau}\left\langle U, N_{-111}\left((\bar{U}\cdot\dot{U})U + (\bar{U}\cdot U)\dot{U}\right) + N_{1-11}\left((U\cdot\bar{U})\dot{U} + (\dot{U}\cdot\bar{U})U\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+N_{11-1}\left((U\cdot\dot{U})\bar{U} + (\dot{U}\cdot U)\bar{U}\right)\right\rangle\\
&- 2\left|A_1\right|^2 A_2\left\langle U, N_{-111}(\bar{U}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\bar{U})U + N_{11-1}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\\
&- A_1^2\bar{A}_2\left\langle U, N_{-111}(\bar{U}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\bar{U})U + N_{11-1}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $F(U)$ gilt für die letzten beiden Summanden:

$$\begin{aligned}
&- 2\left|A_1\right|^2 A_2\left\langle U, N_{-111}(\bar{U}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\bar{U})U + N_{11-1}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\\
&- A_1^2\bar{A}_2\left\langle U, N_{-111}(\bar{U}\cdot U)U + N_{1-11}(U\cdot\bar{U})U + N_{11-1}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\\
=&- 2\left|A_1\right|^2 A_2\left\langle U, F(U)\right\rangle - A_1^2\bar{A}_2\left\langle U, F(U)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Somit ist das Lemma bewiesen. □

Nun wenden wir uns dem 5. Term zu:

Lemma B.1.5 (5.Term)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
&- i\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{k=1}^{3}\left\langle U, \frac{\partial N}{\partial\omega_{l_k}}(\omega_{l_1},\omega_{l_2},\omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial\tau_{l_k}}(E_{l_1}^{(1)}\cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)}\right\rangle\\
=&- i\left\langle U, N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U}\cdot U)U + N_{1-\mathrm{i}1}(U\cdot\bar{U})U + N_{11-\mathrm{i}}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial\tau}A_1^2\\
&- i\left\langle U, N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U}\cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U}\cdot U)U + N_{\mathrm{i}-11}(U\cdot\bar{U})U + N_{1-1\mathrm{i}}(U\cdot\bar{U})U\right.\\
&\qquad\left. N_{\mathrm{i}1-1}(U\cdot U)\bar{U} + N_{1\mathrm{i}-1}(U\cdot U)\bar{U}\right\rangle\frac{\partial A_1}{\partial\tau}\left|A_1\right|^2
\end{aligned}$$

Auch hier sei nochmals an die Definition

$$N_{-\mathrm{i}11} := \frac{\partial N}{\partial\omega_1}(-\omega_1,\omega_1,\omega_1) \text{ usw.}$$

erinnert.

Beweis. Da $E_l^{(1)} = 0$ für $l \neq \pm 1$, wird wieder nur über Permutationen des Tripels $(l_1,l_2,l_3) = (-1,1,1)$ summiert. Wir betrachten abermals den Summanden für

$(l_1, l_2, l_3) = (-1, 1, 1)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&-i\sum_{k=1}^{3}\Big\langle U, \frac{\partial N}{\partial \omega_{l_k}}(\omega_{-1}, \omega_1, \omega_1)\frac{\partial}{\partial \tau_{l_k}}(E_{-1}^{(1)} \cdot E_1^{(1)})E_1^{(1)}\Big\rangle \\
=&-i\Big\langle U, N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U\Big\rangle \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2 - i\Big\langle U, N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U\Big\rangle \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\left|A_1\right|^2 \\
&-i\Big\langle U, N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U\Big\rangle \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\left|A_1\right|^2 \\
=&-i\Big\langle U, N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U\Big\rangle \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2 - i\Big\langle U, N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U\Big\rangle \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\left|A_1\right|^2
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&-i\sum_{l_1+l_2+l_3=1}\sum_{k=1}^{3}\Big\langle U, \frac{\partial N}{\partial \omega_{l_k}}(\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3})\frac{\partial}{\partial \tau_{l_k}}(E_{l_1}^{(1)} \cdot E_{l_2}^{(1)})E_{l_3}^{(1)}\Big\rangle \\
=&-i\Big\langle U, N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U + N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U + N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2 \\
&-i\Big\langle U, N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U + N_{\mathrm{i}-11}(U \cdot \bar{U})U + N_{1-1\mathrm{i}}(U \cdot \bar{U})U \\
&\qquad + N_{\mathrm{i}1-1}(U \cdot U)\bar{U} + N_{1\mathrm{i}-1}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\left|A_1\right|^2,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Uns fehlt noch der letzte Schritt zum Beweis von Satz 3.2.8, die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Lemmata werden mit dem nichtlinearen Term aus Lemma B.1.3 zusammengefaßt. Dies war Gegenstand von

Lemma B.1.6 (Zusammenfassung der Nichtlinearitäten)
Es gilt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
&i\frac{\partial}{\partial \tau}(\left|A_1\right|^2 A_1)\Big\langle U, \frac{d}{d\omega_1}(F(U))\Big\rangle \\
&+ i\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2\Big\langle U, N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}}) + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}} \\
&\qquad -N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U - N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \\
&- i\left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\Big\langle U, N_{-111}(\bar{U} \cdot \dot{U})U + N_{-111}(\bar{U} \cdot U)\dot{U} + N_{1-11}(U \cdot \bar{U})\dot{U} + N_{1-11}(\dot{U} \cdot \bar{U})U \\
&\qquad + N_{11-1}(U \cdot \dot{U})\bar{U} + N_{11-1}(\dot{U} \cdot U)\bar{U} + N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U + N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U \\
&\qquad + N_{\mathrm{i}-11}(U \cdot \bar{U})U + N_{1-1\mathrm{i}}(U \cdot \bar{U})U + N_{\mathrm{i}1-1}(U \cdot U)\bar{U} + N_{1\mathrm{i}-1}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \\
=&i\Big\langle U, G(U)\Big\rangle A_1\frac{\partial \left|A_1\right|^2}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\left|A_1\right|^2 A_1) = 2\left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau}A_1^2$$

wird die linke Seite der Gleichung aus Lemma B.1.6 zu

$$\begin{aligned}
&i\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau} A_1^2 \Big\langle U, \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) + N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}}) + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}} \\
&\qquad\qquad -N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U - N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \\
&+ i\left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau}\Big\langle U, 2\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) \\
&\qquad - N_{-111}(\bar{U} \cdot \dot{U})U - N_{-111}(\bar{U} \cdot U)\dot{U} - N_{1-11}(U \cdot \bar{U})\dot{U} - N_{1-11}(\dot{U} \cdot \bar{U})U \\
&\qquad - N_{11-1}(U \cdot \dot{U})\bar{U} - N_{11-1}(\dot{U} \cdot U)\bar{U} - N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U - N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U \\
&\qquad - N_{\mathrm{i}-11}(U \cdot \bar{U})U - N_{1-1\mathrm{i}}(U \cdot \bar{U})U - N_{\mathrm{i}1-1}(U \cdot U)\bar{U} - N_{1\mathrm{i}-1}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Mit der Definition

$$\begin{aligned}
G(U) := \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) &+ N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}})U + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}} \\
&- N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U - N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U}
\end{aligned}$$

ergibt sich im ersten Summanden das Gewünschte. Jetzt wird $\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right)$ berechnet.

$$\begin{aligned}
F(U) =& N_{-111}(\bar{U} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \bar{U})U + N_{11-1}(U \cdot U)\bar{U} \\
\Rightarrow \frac{d}{d\omega_1}(F(U)) =& (-N_{-\mathrm{i}11} - N_{-1\mathrm{i}1} - N_{-11\mathrm{i}})(\bar{U} \cdot U)U + N_{-111}\left((\dot{\bar{U}} \cdot U)U + (\bar{U} \cdot \dot{U})U + (\bar{U} \cdot U)\dot{U}\right) \\
&+ (N_{\mathrm{i}-11} - N_{1-\mathrm{i}1} + N_{1-1\mathrm{i}})(U \cdot \bar{U})U + N_{1-11}\left((\dot{U} \cdot \bar{U})U + (U \cdot \dot{\bar{U}})U + (U \cdot \bar{U})\dot{U}\right) \\
&+ (N_{\mathrm{i}1-1} + N_{1\mathrm{i}-1} - N_{11-\mathrm{i}})(U \cdot U)\bar{U} + N_{11-1}\left((\dot{U} \cdot U)\bar{U} + (U \cdot \dot{U})\bar{U} + (U \cdot U)\dot{\bar{U}}\right)
\end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen taucht dabei auf wegen $\frac{d}{d\omega_1} N(-\omega_1, \omega_1, \omega_1) = -\frac{dN}{d\omega_1}(-\omega_1, \omega_1, \omega_1)$. Damit gilt für den zweiten Term :

$$\begin{aligned}
&i\Big\langle U, 2\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) - N_{-111}(\bar{U} \cdot \dot{U})U - N_{-111}(\bar{U} \cdot U)\dot{U} - N_{1-11}(U \cdot \bar{U})\dot{U} - N_{1-11}(\dot{U} \cdot \bar{U})U \\
&\quad - N_{11-1}(U \cdot \dot{U})\bar{U} - N_{11-1}(\dot{U} \cdot U)\bar{U} - N_{-11\mathrm{i}}(\bar{U} \cdot U)U - N_{-1\mathrm{i}1}(\bar{U} \cdot U)U \\
&\quad - N_{\mathrm{i}-11}(U \cdot \bar{U})U - N_{1-1\mathrm{i}}(U \cdot \bar{U})U - N_{\mathrm{i}1-1}(U \cdot U)\bar{U} - N_{1\mathrm{i}-1}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \\
&= i\Big\langle U, 2\frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) - \frac{d}{d\omega_1}\left(F(U)\right) + N_{-111}(\dot{\bar{U}} \cdot U)U + N_{1-11}(U \cdot \dot{\bar{U}})U \\
&\quad + N_{11-1}(U \cdot U)\dot{\bar{U}} - N_{-\mathrm{i}11}(\bar{U} \cdot U)U - N_{1-\mathrm{i}1}(U \cdot \bar{U})U - N_{11-\mathrm{i}}(U \cdot U)\bar{U}\Big\rangle \left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \\
&= i\Big\langle U, G(U)\Big\rangle \left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

Und wegen

$$\left|A_1\right|^2 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \tau} A_1^2 = A_1 \frac{\partial \left|A_1\right|^2}{\partial \tau}$$

folgt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] A.HASEGAWA,F.TAPPERT; Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibres, I. Anomalous dispersion, *Applied Physical Letters*, **23** (1973), pp.142-144

[2] H.RÖMER; Theoretische Optik, *VCH-Verlag* (1994), Kapitel 6

[3] G.P.AGRAWAL; Fiber-Optic Communication Systems, 2nd edition, *Wiley Series in Microwave and Optical Engineering* (1997)

[4] YARIV; Optical Electronics, 4th edition, *Saunders College Publishing* (1991), Kapitel 3

[5] G.N.WATSON; A Treatise on the Theory of Bessel Functions, *Oxford University Press* (1958), Kapitel 3

[6] A.NEWELL,J.MOLONEY; Nonlinear Optics, *Addison-Wesley* (1992)

[7] R.BRIGOLA; Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen, *Vieweg* (1996)

[8] T.TANIUTI; Progress of Theoretical Physics, Suppl. **55:1** (1974)

[9] A.JEFFREY,T.KAWAHARA; Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory *Pitman* (1982)

[10] A.HASEGAWA; Optical Solitons in Fibers, *Springer Tracts in Modern Physics* **116**

[11] A.HASEGAWA,Y.KODAMA; Solitons in Optical Communications, *Oxford Series in Optical and Imaging Science* **7** (1995)

[12] Y.KODAMA; Optical Solitons in a Monomode Fiber, *Journal of Statistical Physics* **39** (1985), pp.597-614

[13] G.P.AGRAWAL,R.ESSIAMBRE; Soliton Communication Systems, *Progress in Optics* **37** Elsevier (1997), pp.185-256

[14] E.IANNONE,F.MATERA,A.MECOZZI,M.SETTEMBRE; Nonlinear Optical Communication Networks, *Wiley Series in Microwave and Optical Engineering* (1998)

[15] J.GUCKENHEIMER,P.HOLMES; Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields *Applied Mathematical Sciences* **42** (1985), Springer Verlag

[16] M.Kunze; Periodic solutions of a singular Lagrangian system related to dispersion-managed fiber communication systems, *preprint* (1999)

[17] S.K.Turitsyn,T.Schäfer,K.H.Spantschek,V.K.Mezentsev; Path-averaged chirped optical soliton in dispersion-managed fiber communication lines, *Optics Communications* **163** (1999), pp.122-158

[18] S.K.Turitsyn,E.G.Shapiro; Variational Approach to the Design of Optical Communication Systems with Dispersion Management, *Optical Fiber Technology* **4** (1998), pp.151-188

[19] S.K.Turitsyn,V.K.Mezentsev,E.G.Shapiro; Dispersion-Managed Solitons and Optimization of the Dispersion Management, *Optical Fiber Technology* **4** (1998), pp.384-452

[20] S.K.Turitsyn; Theory of average pulse propagation in high-bit-rate optical transmission systems with strong dispersion management, *JETP Letters* **65** (1997), pp.845-851

[21] A.Hasegawa,Y.Kodama,A.Maruta; Recent Progress in Dispersion-Managed Soliton Transmission Technologies, *Optical Fiber Technology* **3** (1997), pp.197-213

[22] S.K.Turitsyn,I.Gabitov,E.W.Laedke,V.K.Mezentsev, S.L.Musher, E.G.Shapiro,T.Schäfer,K.H.Spantschek; Variational approach to optical pulse propagation in dispersion compensated transmission systems, *Optics Communications* **151** (1998), pp.117-135

[23] S.K.Turitsyn,V.K.Mezentsev; Solitons with Gaussian tails as a carrier pulse in optical communication systems with in-line phase modulators, *Optics Communications* **146** (1998), pp.225-230

[24] N.J.Smith,K.J.Blow,W.J.Firth,K.Smith; Soliton dynamics in the presence of phase modulators, *Optics Communications* **102** (1993), pp.324-328

[25] M.Kunze,T.Küpper,V.K.Mezentsev,E.G.Shapiro,S.K.Turitsyn; Nonlinear Solitary Waves with Gaussian Tails, *Physica D* **128** (1999), pp.273-295

[26] B.Buffoni,L.Jeanjean; Bifurcation from the spectrum towards regular values *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **445** (1993), pp.1-29

[27] T.Küpper,C.A.Stuart; Bifurcation into gaps in the essential spectrum, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **409** (1990), pp.1-34

[28] T.Küpper,C.A.Stuart; Gap-bifurcation for nonlinear perturbations of Hill's equation, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **410** (1990), pp.23-52

[29] M.P.Eastham; The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, *Edinburgh* (1973)

[30] A.Plate; Verzweigung aus dem wesentlichen Spektrum, *Dissertation, Hannover* (1992)

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Köln, den 24. September 1999 ____________________