Universität Köln
Angewandte Mathematik
Johannes Schropp
Michael Kurth

Mathematik für Biologen II, SS 2002

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kuepper/stat.html

Mathematisches Institut
Raum 116/117
Tel: 0221/4702891

Übungsblatt Nr. 7

Abgabe am 17.6.2002 vor den Übungen

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Die Masse (in mg) eines bestimmten Insekts sei normalverteilt mit dem Mittelwert 15 und der Varianz 9.

(i) Welcher Anteil von Insekten zwischen 14 und 20 mg ist zu erwarten ?

(ii) Wie groß sind der Median, sowie das 25%- und das 75%-Quantil der Verteilung ?

Aufgabe 2 (10 Punkte):

In der Biologie liegen häufig sehr breite und schiefe Verteilungen positiver Meßgrößen vor, deren Wertebereiche nach unten durch Null begrenzt sind (z.B. Konzentrationen von Metaboliten im Fließgleichgewicht, Enzymaktivitäten, Dosierungen von Pharmaka, Körpergewichte, Körpervolumina). Eine Verteilung, die dies gut beschreibt, ist die logarithmische Normalverteilung $LN(\mu, \sigma^2)$. Die Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie die Dichtefunktion zu den Parametern $\sigma^2 = 1$ und $\mu = 0$.

(ii) Sei F die zu f gehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie:

$$F(\alpha) = \begin{cases} Z\left(\frac{\ln(\alpha)-\mu}{\sigma}\right) & , \quad \alpha > 0 \\ 0 & , \quad \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet Z wie üblich die Standardnormalverteilung.

Tip: Substituieren Sie im Integral $z = \ln(\alpha)$

(iii) Sei X eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert gilt:

$$E(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Dabei dürfen Sie ohne Beweis folgende Formel benutzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(c + \frac{1}{4}\frac{b^2}{a}\right) \quad \text{für } a > 0.$$

(iv) Eine Annahme des berühmten Modells von Black und Scholes zur Optionspreisbewertung ist, dass die Aktienkurse zu einem bestimmten in der Zukunft liegenden Zeitpunkt logarithmisch normalverteilt sind. Nehmen wir nun an, der Kurs einer bestimmten Aktie in einem Jahr sei $LN(4, 1)$ verteilt.

- Wie groß ist dann der erwartete Wert der Aktie in einem Jahr ?
- Nehmen wir an, Ihre Aktie ist derzeit mit 80 € notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie in einem Jahr weniger wert ist als heute ?

Hinweis: Am Donnerstag den 13.06. findet ab 16:00 auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts das traditionelle Grillfest statt. Neben Getränken zu kleinen Preisen gibt es natürlich auch die legendäre Wurst.