

3. Übung zu Mathematik für Biologen II

<http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/statistik>

Aufgabe 1

Seien A und B zwei Ereignisse mit $P(A), P(B) > 0$. Dann wird B unabhängig von A genannt, falls gilt:

$$P(B|A) = P(B).$$

- (i) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass aus B unabhängig von A folgt, dass auch A unabhängig von B ist.
- (ii) Folgern Sie dann, dass für zwei voneinander unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

- (iii) Zeigen Sie weiter, dass die Umkehrung auch gilt, dass also aus $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ stets die Unabhängigkeit der Ereignisse folgt.

Aufgabe 2

In Deutschland werden etwas mehr Jungen als Mädchen geboren. Laut statistischem Jahrbuch beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt 0.514. In dieser Aufgabe betrachten wir eine zufällig ausgesuchte Familie mit drei Kindern.

- (i) Geben Sie den Ereignisraum Ω an sowie die Zufallsvariable X für die Anzahl der Mädchen an. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ?
- (ii) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse an
 - A : Die Familie hat Kinder beiderlei Geschlechts.
 - B : Höchstens eines der Kinder ist ein Mädchen.
- (iii) Sind A und B voneinander unabhängig (vgl. Aufgabe 1)?
- (iv) Gilt die Aussage aus (iii) auch, wenn Mädchen- und Jungengeburt als gleichwahrscheinlich angenommen werden?

Aufgabe 3

Das Theorem von Bayes findet in vielen Bereichen Anwendung wie etwa beim Vaterschaftstest ("Essen-Möller-Formel") oder bei der vorgeburtlichen Diagnostik. Beispielsweise wird es zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Kindes mit Down-Syndrom benutzt:

Empirisch liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 30-jährige Frau ein Kind mit Down-Syndrom bekommt bei $1/1000$. Um das Risiko näher zu bestimmen wird der sogenannte Triple-Test durchgeführt bei dem die Konstellation dreier Testparameter im mütterlichen Blut bestimmt wird. Dabei besitzen 70% der Mütter, die später ein Kind mit Down-Syndrom zur Welt bringen eine auffällige Wertekonstellation, während bei "normalen" Schwangerschaften lediglich 5% eine Auffälligkeit aufweisen. Falls der Triple-Test nun Auffälligkeiten aufweist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mutter ein Kind mit Down-Syndrom zur Welt bringt?

Abgabe am 22.5.2003 in der Übungsstunde.