MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Johannes Schropp, Michael Kurth

SS 2003
3.7.2003

# 7. Übung zu Mathematik für Biologen II

http://www.mi.uni-koeln.de/~mkurth/statistik

### Aufgabe 1

In der Biologie liegen häufig sehr breite und schiefe Verteilungen positiver Meßgrößen vor, deren Wertebereiche nach unten durch Null begrenzt sind (z.B. Konzentrationen von Metaboliten im Fließgleichgewicht, Enzymaktivitäten, Dosierungen von Pharmaka, Körpergewichte, Körpervolumina). Eine Verteilung, die dies gut beschreibt, ist die logarithmische Normalverteilung $LN(\mu, \sigma^2)$. Die Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie die Dichtefunktion zu den Parametern $\sigma^2 = 1$ und $\mu = 0$.

(ii) Sei $F$ die zu $f$ gehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie:

$$F(\alpha) = \begin{cases} Z\left(\frac{\ln(\alpha)-\mu}{\sigma}\right) & , \quad \alpha > 0 \\ 0 & , \quad \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $Z$ wie üblich die Standardnormalverteilung.

**Tip:** Substituieren Sie im Integral $z = \ln(\alpha)$

(iii) Sei $X$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert gilt:

$$E(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Dabei dürfen Sie ohne Beweis folgende Formel benutzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(c + \frac{1}{4}\frac{b^2}{a}\right) \quad \text{für } a > 0.$$

(iv) Eine Annahme des berühmten Modells von Black und Scholes zur Optionspreisbewertung ist, dass die Aktienkurse zu einem bestimmten in der Zukunft liegenden Zeitpunkt logarithmisch normalverteilt sind. Nehmen wir nun an, der Kurs einer bestimmten Aktie in einem Jahr sei $LN(4, 1)$ verteilt.

- Wie groß ist dann der erwartete Wert der Aktie in einem Jahr ?
- Nehmen wir an, Ihre Aktie ist derzeit mit 80 € notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie in einem Jahr weniger wert ist als heute ?

### Aufgabe 2

Laut einer Meldung vom 24.6.2003 befinden sich auf 90 Prozent aller deutschen Banknoten Spuren von Kokain. Einen Monat nach der Währungsumstellung im Januar 2002 untersuchte ein Wissenschaftler 70 Euro-Noten auf Kokainspuren. Zu diesem Zeitpunkt wiesen nur zwei der 70 Geldscheine Spuren der Droge auf. Aber bereits sieben Monate später waren schon neun von zehn Euro-Scheinen kontaminiert. Lässt dies tatsächlich bei obiger Stichprobe mit

$n = 10$ auf eine signifikante Änderung schliessen ? Berechnen Sie den kritischen Wert zu der Hypothese

$$(H_0): \text{ Maximal } 2/70 \text{ der Geldscheine weisen Kokainspuren auf.}$$

auf einem 1% bzw. 5%-Niveau. Wie gross ist der Fehler zweiter Art, falls wirklich 90% der Banknoten betroffen sind ?

**Aufgabe 3**

In dieser Aufgabe soll das Konzept der Maximum-Likelihood-Methode an einem Beispiel vorgestellt werden.

Um die Anzahl von Fischen in einem Teich zu bestimmen, fangen Sie 20 Fische und markieren diese farbig. Nach einigen Tagen fangen Sie 32 Fische, davon sind 6 farbig markiert. Gesucht ist nun ein Schätzer für die unbekannte Anzahl $N$ der Fische.

Überlegen Sie sich dazu, wie die Zufallsvariable verteilt ist (dies ist abhängig von $N$) und berechnen dann die Wahrscheinlichkeit $P(X = 6)$ für

$$N = 50, 70, 110, 130, 150.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist dann der Wert von $N$ für den $P(X = 6)$ maximal wird, interpolieren Sie gegebenenfalls.

**Abgabe am 10.7.2003 in der Übungsstunde.**