Modulformen - Übung 1 - Lösungen

Dr. Markus Schwagenscheidt

01.04.2019

Aufgabe 1. Es sei

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

die komplexe obere Halbebene und

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

die spezielle lineare Gruppe der ganzzahligen 2×2 Matrizen mit Determinante 1.

(1) Was ist die inverse Matrix von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$? Wie sieht die inverse Matrix aus, wenn die Matrix invertierbar ist, aber nicht Determinante 1 hat?

(2) Zeigen Sie: Zu gegebenen $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegt.

(3) Zeigen Sie: Zwei Matrizen $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ haben genau dann dieselbe untere Zeile (c, d), wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt so dass

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M'.$$

(4) Es sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie die Formel

$$\mathrm{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Wie ändert sich die Formel, wenn die Matrix nicht Determinante 1 hat?

(5) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mittels *Möbiustransformationen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

auf $\mathbb{H}$ operiert.

(6) Zeigen Sie: Definieren $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dieselbe Möbiustransformation auf $\mathbb{H}$, so gilt $M = \pm M'$.

(7) Zeigen Sie, dass die *Cayley-Transformation*

$$\tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bijektiv auf den offenen Einheitskreis $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ abbildet. Geben Sie insbesondere die Umkehrabbildung $D \to \mathbb{H}$ an.

Lösung.

(1) Die inverse Matrix von $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Hat M nicht Determinante 1, so muss man noch durch die Determinante von M teilen, also

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(2) Nach dem Lemma von Bézout gibt es zu teilerfremden ganzen Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen b, d mit $ad - bc = 1$, also liegt die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(3) Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $M' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ berechnet man

$$M'M^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'd - b'c & ab' - a'b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $n = ab' - a'b$.

(4) Wir berechnen

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{(a\tau + b)(c\overline{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2} = \frac{ac|\tau|^2 + ad\tau + bc\overline{\tau} + bd}{|c\tau + d|^2}.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{(ad - bc)\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

(5) Es ist klar, dass $I\tau = \tau$ gilt. Man rechnet direkt nach, dass $M(N\tau) = (MN)\tau$ für alle $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

(6) Es seien $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M\tau = M'\tau$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Es folgt $M^{-1}M'\tau = \tau$. Es genügt daher zu zeigen, dass aus $M\tau = \tau$ schon $M = \pm I$ folgt. Ist $M\tau = \tau$, so gilt

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau$$

und somit

$$c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0.$$

Daraus folgt $c = b = 0$ und $a = d$, woraus wir wegen $ad - bd = 1$ und $a, d \in \mathbb{Z}$ auch $a = d = \pm 1$ erhalten.

(7) Man rechnet nach, dass $\left|\frac{\tau - i}{\tau + i}\right| \leq 1$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt, so dass die Abbildung wohldefiniert ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$w \mapsto i\frac{w - 1}{-w + 1},$$

wie man durch Einsetzen nachprüft. Man kann sie bestimmen, indem man die Abbildung $\tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}$ als Möbiustransformation zur komplexen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$ schreibt. Dann ist die Umkehrabbildung gegeben durch die Möbiustransformation zur inversen Matrix.

Aufgabe 2. Eine *ganzzahlige binäre quadratische Form* ist von der Form

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad A, B, C \in \mathbb{Z}.$$

Die *Diskriminante* von Q ist die Zahl $D = B^2 - 4AC$. Es sei $\mathcal{Q}_D$ die Menge aller ganzzahligen binären quadratischen Formen der Diskriminante D.

(1) Finden Sie für jedes $D \in \mathbb{Z}$ mit $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ jeweils eine ganzzahlige binäre quadratische Form der Diskriminante D.

(2) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mittels

$$\left(Q \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x,y) = Q(ax+by, cx+dy)$$

von rechts auf $\mathcal{Q}_D$ operiert.

(3) Es sei Q eine ganzzahlige binäre quadratische Form. Zeigen Sie die Formel

$$Q\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^{-2}\left(Q \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(\tau, 1)$$

für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$.

(4) Für $D > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 2$ definieren wir die Funktion

$$f_{k,D}(\tau) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{1}{Q(\tau,1)^k}.$$

Man kann zeigen, dass die Reihe absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, und daher eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ darstellt. Zeigen Sie, dass $f_{k,D}$ die Funktionalgleichung

$$f_{k,D}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f_{k,D}(\tau)$$

für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ erfüllt[1].

Lösung 2. Die Rechnungen werden etwas einfacher, wenn man $Q(x,y)$ als Matrixprodukt

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

schreibt. Dann ist

$$(Q \circ M)(x,y) = \left(M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Falls $D \equiv 0 \pmod 4$, also $D = 4n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, so hat die quadratische Form $Q(x,y) = x^2 - ny^2$ Diskriminante D. Falls $D \equiv 1 \pmod 4$, also $D \equiv 1 + 4m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$, so hat die quadratische Form $Q(x,y) = x^2 + xy - my^2$ Diskriminante D.

(2) Beachte, dass die Diskriminante D von Q gleich $-4\det\left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{smallmatrix}\right)$ ist. Die Diskriminante von $Q \circ M$ ist also gleich

$$-4\det\left(M^t \left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{smallmatrix}\right) M\right) = -4\det\left(\begin{smallmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{smallmatrix}\right) = D,$$

da die Determinante multiplikativ ist und $\det(M^t) = \det(M) = 1$. Man sieht leicht, dass $Q \circ I = Q$ und $Q \circ (MN) = (Q \circ M) \circ N$ für $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt, d.h. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert von rechts auf $\mathcal{Q}_D$.

[1] Man sagt, dass $f_{k,D}$ wie eine Modulform vom Gewicht $2k$ transformiert.

(3) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},1\right) &= \left(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad 1\right)\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a\tau+b}{c\tau+d} \\ 1\end{pmatrix} \\
&= (c\tau+d)^{-2}\left(a\tau+b \quad c\tau+d\right)\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\tau+b \\ c\tau+d\end{pmatrix} \\
&= (c\tau+d)^{-2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau \\ 1\end{pmatrix}\right)^t \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau \\ 1\end{pmatrix} \\
&= (c\tau+d)^{-2}\left(Q\circ\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right)(\tau,1).
\end{aligned}$$

(4) Mithilfe der letzten Teilaufgabe berechnen wir

$$\begin{aligned}
f_{k,D}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) &= \sum_{Q\in\mathcal{Q}_D}\frac{1}{Q(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},1)^k} \\
&= (c\tau+d)^{2k}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_D}\frac{1}{(Q\circ\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right))(\tau,1)^k} \\
&= (c\tau+d)^{2k}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_D}\frac{1}{Q(\tau,1)^k},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $Q\circ M$ mit Q ebenfalls die ganze Menge $\mathcal{Q}_D$ durchläuft, d.h. dass die Reihe nur umgeordnet wird.

Aufgabe 3. Eine *Partition* einer natürlichen Zahl n ist eine Zerlegung $n=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ mit natürlichen Zahlen $1\le\lambda_1,\ldots,\lambda_k\le n$. Zum Beispiel ist $5=1+1+3$ eine Partition von 5. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n, wobei wir ohne Beachtung der Reihenfolge zählen. Es ist z.B. $p(3)=3$, weil es die Partitionen $3=3, 3=2+1$ und $3=1+1+1$ gibt.

(1) Berechnen Sie $p(1),\ldots,p(6)$ per Hand.

(2) Es sei $p(n,k)$ die Anzahl der Partitionen von n mit genau k Summanden. Zeigen Sie

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n}p(n,k),$$

und dass die $p(n,k)$ rekursiv gegeben sind durch $p(n,1)=1$ und $p(n,n)=1$ und

$$p(n,k)=p(n-1,k-1)+p(n-k,k).$$

(3) Machen Sie sich klar, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}$$

gilt (wobei wir $p(0)=1$ setzen)[2].

[2] Wir werden später sehen, dass die Funktion $\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^n)$ mit $q=e^{2\pi i\tau}$ eine Modulform vom Gewicht 1/2 ist. Daher ist die erzeugende Reihe der Partitionsfunktion eine Modulform vom Gewicht $-1/2$.

Lösung 3.

(1) Es gilt

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \quad p(5) = 7, \quad p(6) = 11.$$

(2) Es sei $P(n)$ die Menge aller Partitionen von n, so dass $p(n) = \#P(n)$, und $P(n,k)$ die Menge aller Partitionen von n mit genau k Teilen. Es gilt offenbar

$$P(n) = \bigcup_{k=1}^{n} P(n,k)$$

als disjunkte Vereinigung, woraus $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$ folgt.

Es sei nun $P_1(n,k)$ die Menge aller Partitionen von n mit genau k Teilen, die mindestens eine 1 enthalten, und $P_2(n,k)$ die Menge aller Partitionen von n mit genau k Teilen, die keine 1 enthalten. Es gilt dann also

$$p(n,k) = \#P_1(n,k) + \#P_2(n,k).$$

Die Abbildungen

$$P_1(n,k) \to P(n-1,k-1), \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1) \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$$

und

$$P_2(n,k) \to P(n-k,k), \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto (\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_k - 1)$$

sind Bijektionen (man schreibt leicht die Umkehrabbildungen hin), so dass

$$\#P_1(n,k) = p(n-1,k-1), \quad \#P_2(n,k) = p(n-k,k).$$

Wir erhalten die behauptete Bijektion.

(3) Mit der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} q^{ak} \\
&= \left(\sum_{a_1=0}^{\infty} q^{a_1} \right) \left(\sum_{a_2=0}^{\infty} q^{2a_2} \right) \left(\sum_{a_3=0}^{\infty} q^{3a_3} \right) \left(\sum_{a_4=0}^{\infty} q^{4a_4} \right) \cdots \\
&= \sum_{a_1, a_2, a_3, \ldots = 0}^{\infty} q^{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \#\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n : a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots + na_n = n\} q^n.
\end{aligned}$$

(die Rechnung ist formal natürlich nicht ganz richtig). Fasst man a_j als die Anzahl der j's in einer Partition auf, so sieht man, dass die obige Anzahl genau die Partitionsfunktion $p(n)$ ist.

Aufgabe 4. Installieren Sie sage math (https://www.sagemath.org/de/)[3] und schreiben Sie jeweils ein Programm, dass die folgenden Aufgaben löst:

(1) Gib 'Hello world!' aus.
(2) Gib alle Primzahlen zwischen 1 und n aus, für ein vom Benutzer gegebenes n.
(3) Wir repräsentieren eine binäre quadratische Form $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ in sage als Liste $[A, B, C]$. Schreiben Sie jeweils ein Programm, dass auf Eingabe von $Q = [A, B, C]$ folgende Aufgaben löst:
   (a) Berechne die Diskriminante von Q.
   (b) Berechne $Q(x, y)$ für gegebene $x, y \in \mathbb{R}$.
   (c) Berechne $Q \circ M$ für eine gegebene Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
(4) Berechne die Partitionsfunktion $p(n)$.

[3] Alternativ können Sie sich einen Account bei cocalc.com erstellen, und sage im Browser benutzen.