Modulformen - Übung 2

Dr. Markus Schwagenscheidt

08.04.2019

Aufgabe 1. Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

wobei die Kongruenz eintragsweise zu verstehen ist.

(1) Machen Sie sich klar, dass $\Gamma(N)$ tatsächlich eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass $\Gamma(N)$ ein Normalteiler von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.
Hinweis: Finden Sie einen geeigneten Homomorphismus, dessen Kern $\Gamma(N)$ ist.
(3) Eine Gruppe $\Lambda \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ heißt *Kongruenzuntergruppe*, falls sie $\Gamma(N)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ enthält. Zeigen Sie, dass jede Kongruenzuntergruppe endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat.

Lösung.

(1) Man rechnet nach, dass $I \in \Gamma(N)$, und dass mit $M, M' \in \Gamma(N)$ auch $MM' \in \Gamma(N)$ gilt.
(2) Die komponentenweise Reduktion modulo N definiert eine Abbildung

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Die Gruppe $\Gamma(N)$ ist genau der Kern dieser Abbildung. Daraus folgt einerseits, dass $\Gamma(N)$ ein Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist (man kann dies aber auch direkt nachrechnen). Andererseits folgt aus dem Homomorphiesatz, dass $\Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu einer Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ isomorph ist (man kann sogar zeigen, dass $\Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$). Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ offenbar eine endliche Gruppe ist, ist $\Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ebenfalls endlich. Das bedeutet, dass $\Gamma(N)$ endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat.
(3) Dies folgt sofort daraus, dass $\Gamma(N) \subset \Lambda$ und dass $\Gamma(N)$ endlichen Index hat.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$ operiert.

Lösung. Es sei $\tau = x + iy$. Dann ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und es gilt $Mi = \tau$. Daraus folgt, dass es zu jedem Paar $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gibt mit $M\tau = \tau'$, also operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass zwei elliptische Kurven $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_1}$ und $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_2}$ genau dann isomorph sind, wenn es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $\tau_2 = M\tau_1$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathbb{C}/\Lambda$ und $\mathbb{C}/\Lambda'$ genau dann isomorph sind, wenn $\Lambda' = \alpha\Lambda$ für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lösung. Ist $\tau_2 = \frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d}$, so ist

$$\Lambda_{\tau_2} = \mathbb{Z}\frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d} + \mathbb{Z} = \frac{1}{c\tau_1+d}(\mathbb{Z}(a\tau_1+b)+\mathbb{Z}(c\tau_1+d)) = \frac{1}{c\tau_1+d}(\mathbb{Z}\tau_1+\mathbb{Z}) = \alpha\Lambda_{\tau_1}$$

mit $\alpha = 1/(c\tau_1+d)$. Nach einem Satz aus der Vorlesung sind die elliptischen Kurven $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_1}$ und $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_2}$ isomorph.

Nehmen wir nun an, dass die beiden elliptischen Kurven isomorph sind, d.h. es gilt

$$\mathbb{Z}\tau_2 + \mathbb{Z} = \alpha(\mathbb{Z}\tau_1 + \mathbb{Z})$$

für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Somit ist $1 \in \alpha(\mathbb{Z}\tau_1 + \mathbb{Z})$, d.h. es gibt $c, d \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\alpha(c\tau_1 + d) = 1,$$

also $\alpha = 1/(c\tau_1+d)$. Andererseits ist $\tau_2 \in \alpha(\mathbb{Z}\tau_1+\mathbb{Z})$, d.h. es gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\alpha(a\tau_1 + d) = \tau_2.$$

Zusammen folgt

$$\tau_2 = \frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d}.$$

Es gilt dann also

$$\mathbb{Z}(a\tau_1+b)+\mathbb{Z}(c\tau_1+d) = \mathbb{Z}\tau_1+\mathbb{Z},$$

woraus $ad-bc = \pm 1$ folgt. Wegen $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ und der Formel $\mathrm{Im}(\tau_2) = \frac{(ad-bc)\mathrm{Im}(\tau_1)}{|c\tau+d|^2}$ muss $ad-bc = 1$ sein.

Aufgabe 4. (Sage)

(1) Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ sei

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

die Riemannsche Zetafunktion. Schreiben Sie ein Programm, dass $\zeta(s)$ näherungsweise berechnet, und überzeugen Sie sich mittels Ihres Programms, dass die folgenden Auswertungen gelten:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Verleichen Sie ihre Funktion für einige s-Werte mit der Sage-Funktion zeta(s).

(2) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ sei

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

die Gammafunktion. Schreiben Sie ein Programm, dass $\Gamma(s)$ näherungsweise berechnet, und überzeugen Sie sich, dass

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

gilt. Verleichen Sie ihre Funktion für einige s-Werte mit der Sage-Funktion gamma(s).