Modulformen - Übung 3

Dr. Markus Schwagenscheidt

15.04.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \ (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

erzeugt wird.

Lösung. Es sei G die von den oben angegebenen Matrizen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Weiter sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Wir zeigen, dass $M \in G$ gilt.

Ist $c = 0$, so gilt $ad = 1$, und wir haben

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Ist $c \neq 0$, so schreiben wir

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad/c - b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrix auf der rechten Seite liegt nach dem oben Gezeigten in G, und die anderen beiden Matrizen gehören zu den Erzeugern von G. Damit ist $M \in G$. Es folgt $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für $K \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(a) $K \in \mathrm{SO}(2)$,
(b) $Ki = i$,
(c) $K = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Lösung. (a) $\Leftrightarrow$ (c) Es ist $K = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}(2)$ äquivalent zu

$$M^t M = M M^t = I, \quad \det(M) = 1$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$ac + bd = ab + bc = 0, \quad a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = b^2 + d^2 = a^2 + b^2 = 1, \quad ad - bc = 1.$$

Man sieht leicht, dass daher die Matrizen in $\mathrm{SO}(2)$ alle von der Form

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1,$$

sind, und umgekehrt rechnet man sofort nach, dass alle Matrizen dieser Form in $\mathrm{SO}(2)$ liegen.
(b) $\Leftrightarrow$ (c) Es gilt.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} i = \frac{ai + b}{-bi + a} = \frac{(ai + b)(a + ib)}{a^2 + b^2} = i.$$

Ist umgekehrt

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i,$$

also

$$ai + b = -c + id,$$

so folgt $a = d$ und $b = -c$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $\tau \in \mathcal{F}$ und $M \in \Gamma$, so gilt $\mathrm{Im}(M\tau) \leq \mathrm{Im}(\tau)$.

Lösung. Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $\tau = x + iy \in \mathcal{F}$ können wir abschätzen:

$$|c\tau + d|^2 = c^2|\tau|^2 + 2cdx + d^2 \geq c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq 1.$$

Daraus folgt $\mathrm{Im}(M) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2} \leq \mathrm{Im}(\tau)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Hat eine Matrix $M \in \Gamma$ endliche Ordnung, so ist ihre Ordnung entweder $1, 2, 3, 4$, oder 6. Geben Sie zu jeder dieser Ordnungen eine passende Matrix an.

Lösung. Hat M endliche Ordnung, so ist M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, und die Eigenwerte müssen Einheitswurzeln sein, sagen wir ξ und ξ'. Die Determinante von M ist gleich $\xi\xi' = 1$, also ist $\xi' = \overline{\xi}$. Die Spur von M ist gleich $\xi + \overline{\xi}$, andererseits aber auch eine ganze Zahl. Schreiben wir

$$\xi = e^{2\pi i\alpha} = \cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha), \quad \alpha \in [0,1) \cap \mathbb{Q},$$

so ist

$$\xi + \overline{\xi} = 2\cos(2\pi\alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Dies ist im Intervall $[0,1)$ nur möglich für $\alpha = 0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4$. Die Möglichkeiten für ξ sind also $\xi = \pm 1, \pm i, (\pm 1 \pm \sqrt{3})/2$. Die Ordnungen dieser ξ sind entweder $1, 2, 3, 4$ oder 6, daher hat auch M eine dieser Ordnungen.

Aufgabe 5. (Sage)

(1) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenem $\tau \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma$ die Möbiustransformation $M\tau$ berechnet.
(2) Berechnen Sie $ST^7S^{-1}T^{19}$ mithilfe von Sage.
(3) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenem $\tau \in \mathbb{H}$ entscheidet, ob τ im Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ liegt oder nicht.

Aufgabe 6. (Zusatzaufgabe) Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe* N durch

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass $\Gamma(N)$ ein Normalteiler von Γ von endlichem Index ist. Wir wollen nun eine Formel für den Index von $\Gamma(N)$ in Γ bestimmen. Zeigen Sie dafür folgende Aussagen.

(1) $\Gamma(N)$ ist der Kern der komponentenweise Reduktion mod N

$$r_N : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

(2) Der Homomorphismus r_N ist surjektiv.

(3) Es gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z})$$

falls $N = N_1N_2$ mit $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$.

(4) Es gilt

$$|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})| = p^{3n}(1 - 1/p^2)$$

für jede Primzahl p und $n \geq 1$.

(5) Wir haben die Formel

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} (1 - 1/p^2).$$

Lösung. Hinweise zur Lösung finden sich in Diamond-Shurman, Aufgaben 1.2.2 und 1.2.3.

Aufgabe 7. (Sage Zusatzaufgabe) Schreiben Sie ein Programm, das für eine gegebene Matrix $M \in \Gamma$ eine Zerlegung der Form

$$M = S^{m_1} T^{m_2} S^{m_3} \cdots T^{m_{n-1}} S^{m_n}$$

mit $m_j \in \mathbb{Z}$ berechnet. Das Programm soll zu gegebenem M die Liste $[m_1, \ldots, m_n]$ der Exponenten ausgeben.