Modulformen - Übung 4

Dr. Markus Schwagenscheidt

29.04.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jede Matrix endlicher Ordnung in Γ konjugiert ist zu einer der Matrizen

$$\pm I, \quad \pm S, \quad \pm TS, \quad \pm(TS)^2, \quad \pm ST, \quad \pm(ST)^2.$$

Hinweis: Jede Matrix $M \in \Gamma$ endlicher Ordnung ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, und ihre beiden Eigenwerte sind zueinander konjugierte Einheitswurzeln. Was folgt daraus für $|\mathrm{tr}(M)|$?

Lösung. Sind beide Eigenwerte $+1$ oder -1, so ist M gleich $+I$ oder $-I$, und wir sind fertig. Andernfalls ist $|\mathrm{tr}(M)| = \xi + \overline{\xi} < 2$. Daher ist M elliptisch, das heißt, M hat einen eindeutigen Fixpunkt $\tau_0 \in \mathbb{H}$. Es gibt ein $N \in \Gamma$ so dass $\tau_1 = N\tau_0 \in \mathcal{F}$. Weiter gilt

$$NMN^{-1}\tau_1 = NMN^{-1}N\tau_0 = NM\tau_0 = N\tau_0 = \tau_1,$$

und die Matrix NMN^{-1} ist von $\pm I$ verschieden (sonst wäre schon $M = \pm I$). Damit hat τ_1 nichttrivialen Stabilisator. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $\tau_1 \in \{i, \rho, \rho^2\}$, und NMN^{-1} ist eine der oben angebenen Matrizen (da diese Matrizen genau die elliptischen Matrizen sind, die einen Fixpunkt in $\mathcal{F}$ haben).

Aufgabe 2. Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe 1-periodische Funktion mit Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_f(n) q^n.$$

Zeigen Sie die Formel

$$a_f(n) = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx,$$

wobei $y > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Lösung. Wir setzen die Fourierreihe von f in das Integral ein:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi i n(x+iy)}dx &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_f(m) e^{2\pi i m(x+iy)} e^{-2\pi i n(x+iy)} dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_f(m) e^{-2\pi(m-n)y} \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x} dx}_{=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m \neq n.\end{cases}} = a_f(n).\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass das Integral nicht von der Wahl von $y > 0$ abhängt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die normalisierte Eisensteinreihe E_k durch die Formel

$$E_k(z) = \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} 1|_k M$$

gegeben ist, wobei $\Gamma_\infty = \{\pm T^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Lösung. Wir haben E_k definiert als

$$E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}} (c\tau + d)^{-k}.$$

In der Summe in G_k schreiben wir $(c,d) = n(c',d')$ mit $n = \gcd(c,d)$ und $\gcd(c',d') = 1$. Dann erhalten wir

$$E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \gcd(c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \gcd(c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k}.$$

Wir definieren $\overline{\Gamma}_\infty = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\} = \Gamma_\infty/\{\pm 1\}$. Dann gilt

$$\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} 1|_k M = \frac{1}{2} \sum_{M\in\overline{\Gamma}_\infty\backslash\Gamma} 1|_k M.$$

Man erhält ein Repräsentantensystem von $\overline{\Gamma}_\infty\backslash\Gamma$, indem man zu jedem Paar (c,d) teilerfremder ganzer Zahlen eine Matrix

$$M_{c,d} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

wählt (dabei sind $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 d - b_0 c = 1$ beliebig). Wir erhalten

$$\frac{1}{2} \sum_{M\in\overline{\Gamma}_\infty\backslash\Gamma} 1|_k M = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \gcd(c,d)=1}} j(M_{c,d},\tau)^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \gcd(c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k} = E_k.$$

Aufgabe 4. Die Bernoulli-Zahlen B_n sind definiert durch

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

(1) Berechnen Sie B_0, B_1 und B_2 per Hand.
(2) Zeigen Sie, dass $B_n = 0$ für alle ungeraden $n \geq 3$ gilt.
(3) Zeigen Sie, dass
$$\sum_{n=0}^{m} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} = 0$$
für $m \geq 1$ gilt.
(4) Zeigen Sie, dass $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Lösung.

(1) Setzen wir $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ so gilt $B_n = f^{(n)}(0)$. Da man 0 nicht direkt einsetzen kann, betrachten wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(0)$. Wir berechnen mit der Regel von de l'Hospital:

$$\begin{aligned} B_0 &= \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1, \\ B_1 &= \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2(e^x-1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2} \\ B_2 &= \lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x(e^x-1) - 2e^x(e^x-1-xe^x)}{(e^x-1)^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3 - 3e^x + x + 2xe^x}{3(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + 2x}{6(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+2}{6e^x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(2) Man rechnet nach, dass die Funktion

$$g(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$$

gerade ist, also $g(x) = g(-x)$ erfüllt. Daher hat sie eine Taylorentwicklung der Form

$$g(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}.$$

Andererseits haben wir

$$g(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 1}}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Koeffizientenvergleich liefert $B_n = 0$ für alle ungeraden $n \geq 3$.

(3) Wir betrachten die Funktion

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}.$$

Multiplikation mit $\frac{x}{e^x-1}$ liefert

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} x^m.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} = 0$$

für $m \geq 1$.

(4) Aus der letzten Teilaufgabe folgt

$$B_m = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = 0, \\ -m! \sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!}, & \text{falls } m > 0. \end{cases}$$

Daraus erhält man leicht per Induktion, dass alle B_m rational sind.

Aufgabe 5.

(1) Berechnen Sie die ersten drei Fourierkoeffizienten von E_8 mittels der Formel aus der Vorlesung.

(2) Berechnen Sie die ersten drei Fourierkoeffizienten von Δ durch Ausmultiplizieren der Produktentwicklung

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Aufgabe 6. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das die folgenden Aufgaben löst:

(1) Berechne die Teilersumme $\sigma_{k-1}(n)$ für gegebene k, n.

(2) Berechne die Fourierentwicklung von E_k bis zu einem vorgegebenem q^N.
Zusatz: Überzeugen Sie sich mithilfe ihres Programms, dass $E_4^2 = E_8$ gilt.

(3) Berechne die Fourierentwicklung von $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$ bis zu einem vorgegebenem q^N.

(4) Verifizieren Sie die Formel

$$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k$$

für gerade $k \geq 2$ numerisch für einige Werte von k.