Modulformen - Übung 5

Dr. Markus Schwagenscheidt

06.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie
$$\int_i^\rho \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{2\pi i}{12},$$
wobei der Integrationsweg von i nach ρ entlang des Einheitskreises verläuft.

Lösung. Wir parametrisieren den Integrationsweg durch
$$\tau = e^{-2\pi i t}, \qquad -\frac{1}{4} \leq t \leq -\frac{1}{6},$$
und berechnen
$$\int_i^\rho \frac{d\tau}{\tau} = -2\pi i \int_{-1/4}^{-1/6} e^{-2\pi i t} \frac{dt}{e^{-2\pi i t}} = -2\pi i(-1/6+1/4) = -2\pi i/12.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Ramanujan τ-Funktion die Kongruenz
$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Lösung. Man zeigt zuerst mithilfe von $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ und durch Vergleich der Koeffizienten bei q, dass
$$\Delta = \frac{691}{762048}(E_{12} - E_6^2)$$
gilt. Dazu benutzt man die Fourierentwicklungen
$$E_6 = 1 - 504\sum_{n=1}^\infty \sigma_5(n)q^n,$$
$$E_{12} = 1 + \frac{65520}{619}\sum_{n=1}^\infty \sigma_{11}(n)q^n.$$
Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir
$$762048\tau(n) = 65520\sigma_{11}(n) - 691a(n),$$
wobei $a(n)$ den n-ten Fourierkoeffizienten von E_6^2 bezeichnet. Da E_6 ganzzahlige Fourierkoeffizienten hat, sind auch die $a(n) \in \mathbb{Z}$. Rechnen wir modulo 619 und benutzen, dass
$$762048 \equiv 65520 \equiv 566 \pmod{691}$$
modulo 619 invertierbar ist, so folgt
$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Eisensteinreihen $E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{14}$ in $\mathcal{F}$.

Lösung. Aus der Gewichtsformel folgt, dass die Eisensteinreihen $E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{14}$ nur Nullstellen bei i bzw. ρ modulo Γ haben, mit folgenden Ordnungen:

	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{14}
$\mathrm{ord}_i(E_k)$	0	1	0	1	1
$\mathrm{ord}_\rho(E_k)$	1	0	2	1	2

Aufgabe 4. Zeigen Sie $E_4^2 = E_8$. Beweisen Sie damit die Gleichung

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. Da $M_8 = \mathbb{C}E_8$ gilt, muss $E_4^2 \in M_8$ ein Vielfaches von E_8 sein. Da beide Funktionen konstanten Term 1 haben, folgt $E_4^2 = E_8$. Setzt man die Fourierentwicklungen von E_4 und E_8 sein, so bedeutet das

$$\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right)^2 = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n.$$

Multipliziert man die linke Seite aus und vergleicht die Koeffizienten, so erhält man die behauptete Identität der Teilersummen.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige modulare Funktion j_n gibt, so dass $j_n = q^{-n} + O(q)$. Konstruieren Sie dazu j_n als Polynom in j.

Lösung. Für $m \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Funktionen j^m (mit $j^0 = 1$). Da j mit q^{-1} beginnt, beginnt j^m mit q^{-m}. Es sei

$$j^m(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_m(n) q^n$$

die Fourierentwicklung von j^m. Dann hat die induktiv definierte Funktion

$$j_0 = 1, \qquad j_m(\tau) = j^m - \sum_{n=0}^{m-1} a_m(-n) j_n$$

die gewünschten Eigenschaften. Zum Beispiel haben wir

$$\begin{aligned}
j_0 &= 1,\\
j_1 &= j - 744 j_0 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots,\\
j_2 &= j^2 - 1488 j_1 - 947304 j_0 = q^{-2} + 42987520q + 40491909396q^2 + \dots.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das folgende Aufgaben löst:

(1) Berechne $\dim(M_k)$ und $\dim(S_k)$ für $k \in \mathbb{Z}$.
(2) Berechne die Fourierentwicklung von j bis zu einem vorgegebenen q^N.
(3) Berechne die Polynome p_n so dass $j_n = p_n(j)$.

Aufgabe 7. (Zusatzaufgabe)

(1) Es sei $f \in M_k$. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' von f das Transformationsverhalten

$$f'(M\tau) = (c\tau + d)^{k+2} f'(\tau) + kc(c\tau + d)^{k+1} f(\tau)$$

für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ besitzt.

(2) Für $f \in M_k$ definieren wir den *Raising-Operator* durch

$$R_k f = 2if' + ky^{-1} f.$$

Zeigen Sie, dass $R_k f$ wie eine Modulform vom Gewicht $k+2$ unter Γ transformiert.

(3) Für $f \in M_k$ und $g \in M_\ell$ definieren wie die *Rankin-Cohen Klammer* durch

$$[f, g] = \ell f' g - k f g'.$$

Zeigen Sie, dass $[f, g] \in S_{k+\ell}$ eine Spitzenform vom Gewicht $k + \ell + 2$ ist.

(4) Zeigen Sie

$$\Delta = \frac{1}{1728 \cdot 4\pi i} [E_4, E_6]$$

und beweisen Sie damit die Gleichung

$$\tau(n) = \frac{n}{12}(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) - 70 \sum_{\substack{r,s \geq 1 \\ r+s=n}} (3r - 2s)\sigma_3(r)\sigma_5(s)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

(5) Folgern Sie die Kongruenzen

$$\tau(n) \equiv n\sigma_5(n) \pmod 5$$
$$\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \pmod 7$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.