Modulformen - Übung 6

Dr. Markus Schwagenscheidt

13.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $j(i) = 1728$ gilt.

Lösung. Wir schreiben

$$j = \frac{E_4^3}{\Delta} = 1728 \frac{E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}.$$

Nach der Gewichtsformel ist $E_6(i) = 0$ und $E_4(i) \neq 0$. Daraus folgt $j(i) = 1728$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(1) j' ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht 2.

(2) Jede meromorphe Modulform vom Gewicht 2 lässt sich als Polynom in j, j' schreiben.

Lösung. Differenzieren der Gleichung $j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = j(\tau)$ nach τ und $\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{1}{(c\tau+d)^2}$ liefern

$$j'\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 j'(\tau).$$

Da j meromorph auf $\mathbb{H}$ und bei ∞ ist, gilt dasselbe auch für j'. Damit ist j' eine meromorphe Modulform vom Gewicht 2.

Ist f eine meromorphe Modulform vom Gewicht 2, so ist f/j' eine modulare Funktion, und daher ein Polynom in j.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die nicht-holomorphe Eisensteinreihe

$$E_2^*(\tau) = -\frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)} + 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

wie eine Modulform vom Gewicht 2 unter Γ transformiert.

Lösung. Da E_2^* offenbar richtig unter T transformiert, genügt es, das Transformationsverhalten unter S zu prüfen. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die holomorphe Eisensteinreihe

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

das Transformationsverhalten

$$E_2(-1/\tau) = \tau^2 E_2(\tau) - \frac{6}{\pi} i\tau$$

besitzt. Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} E_2^*(-1/\tau) &= E_2(-1/\tau) - \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(-1/\tau)} \\ &= \tau^2 E_2(\tau) - \frac{6}{\pi} i\tau - \frac{3|\tau|^2}{\pi y} \\ &= \tau^2 \left(E_2(\tau) - \frac{6iy + 3\overline{\tau}}{\pi y \tau} \right) \\ &= \tau^2 \left(E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y} \right) = \tau^2 E_2^*(\tau). \end{aligned}$$

Daraus folgt $E_2^*|_2 M = E_2^*$ für alle $M \in \Gamma$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die holomorphe Eisensteinreihe E_2 das Transformationsverhalten

$$E_2|_2 M(\tau) = E_2(\tau) - \frac{6ic}{\pi(c\tau + d)}$$

für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ besitzt.

Lösung. Aus der letzten Aufgabe wissen wir, dass

$$E_2^*|_2 M = E_2^*$$

gilt. Daraus folgt wegen $E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)}$, dass

$$E_2|_2 M(\tau) - (c\tau + d)^{-2} \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(M\tau)} = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)}.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$-\frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)} + (c\tau + d)^{-2} \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(M\tau)} = -\frac{6ic}{\pi(c\tau + d)}$$

gilt. Diese Gleichung überprüft man durch eine kurze Rechnung.

Aufgabe 5.

(1) Zeigen Sie, dass

$$E_2(\tau) - N E_2(N\tau) = E_2^*(\tau) - N E_2^*(N\tau)$$

gilt

(2) Zeigen Sie, dass

$$E_{2,\Gamma_0(N)}(\tau) = E_2(\tau) - N E_2(N\tau)$$

für $N \geq 2$ wie eine Modulform vom Gewicht 2 unter $\Gamma_0(N)$ transformiert[1].

(3) Zeigen Sie, dass $E_{2,\Gamma_0(N)}|_2 L$ für jede Matrix $L \in \Gamma$ bei ∞ holomorph ist.

[1]Zur Erinnerung: $\Gamma_0(N)$ ist Gruppe aller $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Matrizen, deren linker unterer Eintrag durch N teilbar ist.

Lösung.

(1) Es gilt $E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y}$. Daraus folgt

$$E_2^*(\tau) - NE_2^*(N\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y} - NE_2(N\tau) + N\frac{3}{\pi N y} = E_2(\tau) - NE_2(N\tau),$$

das heißt, die nichtholomorphen Teile von E_2^* heben sich in der Summe heraus.

(2) Schreiben wir

$$E_{2,\Gamma_0(N)}(\tau) = E_2^*(\tau) - NE_2^*(N\tau)$$

so genügt es wegen der Modularität von E_2^* unter Γ zu zeigen, dass $E_2^*(N\tau)$ wie eine Modulform vom Gewicht 2 unter $\Gamma_0(N)$ transformiert. Dies ist ein allgemeines Prinzip: ist $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die wie eine Modulform vom Gewicht k zu Γ transformiert, so transformiert $f_N(\tau) := f(N\tau)$ wie eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$. Denn ist $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, so liegt die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{smallmatrix}\right)$ in Γ und wir können wir berechnen:

$$\begin{aligned} f_N(M\tau) &= f\left(N\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f\left(\frac{aN\tau+bN}{\frac{c}{N}N\tau+d}\right) = f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{smallmatrix}\right) N\tau\right) \\ &= j\left(\left(\begin{smallmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{smallmatrix}\right), N\tau\right)^k f(N\tau) = (\tfrac{c}{N}N\tau+d)^k f(N\tau) = (c\tau+d)^k f_N(\tau). \end{aligned}$$

(3) Wieder genügt es zu zeigen, dass $E_2^*(N\tau)|_2 L$ für $L \in \Gamma$ bei ∞ holomorph ist, und wieder zeigen wir dies allgemeiner für eine Funktion f, die wie eine Modulform vom Gewicht k unter Γ transformiert und bei ∞ holomorph ist. Für $L = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ gilt zunächst

$$f_N|_k L = f|_k \begin{pmatrix} Na & Nb \\ c & d \end{pmatrix}$$

Man zeigt nun leicht, dass es eine Matrix $M' \in \Gamma$ sowie $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} Na & Nb \\ c & d \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Dazu betrachtet man $M'^{-1}\begin{pmatrix} Na & Nb \\ c & d \end{pmatrix}$ und wählt M' so, dass der linke untere Eintrag dieser Matrix 0 wird. Es folgt

$$\begin{aligned} f_N|_k L &= f|_k \begin{pmatrix} Na & Nb \\ c & d \end{pmatrix} = f|_k M' \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = f|_k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = f\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\delta}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_f(n) e^{2\pi i n \frac{\beta}{\delta}} e^{2\pi i n \frac{\alpha\tau}{\delta}} \end{aligned}$$

also ist $f_N|_k L$ holomorph bei ∞.

Aufgabe 6. Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die wie eine Modulform vom Gewicht k unter Γ transformiert. Zeigen Sie:

(1) Ist $k \not\equiv 0 \pmod 4$, so ist $f(i) = 0$.

(2) Ist $k \not\equiv 0 \pmod 6$, so ist $f(\rho) = 0$.

Benutzen Sie dies um die Werte $E_2(i)$ und $E_2(\rho)$ zu berechnen.

Lösung. Wir zeigen den ersten Punkt, da der zweite ähnlich gezeigt werden kann. Die Matrix $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegt im Stabilisator von i. Das Transformationsverhalten von f unter S ist

$$f(S\tau) = \tau^k f(\tau)$$

Für $\tau = i$ erhalten wir

$$f(i) = i^k f(i),$$

also $f(i) = 0$ falls $k \not\equiv 0 \pmod 4$.

Da E_2^* wie eine Modulform vom Gewicht 2 transformiert, erhalten wir $E_2^*(i) = E_2^*(\rho) = 0$. Auf der anderen Seite gilt

$$\frac{3}{\pi \mathrm{Im}(i)} = \frac{3}{\pi}, \quad \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\rho)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

und somit

$$E_2(i) = E_2^*(i) + \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(i)} = \frac{3}{\pi}, \quad E_2(\rho) = E_2^*(\rho) + \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\rho)} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Aufgabe 7. (Sage) Berechnen Sie die Fourierentwicklung von E_2 bis zu einem vorgegebenen q^N. Berechnen Sie damit die Werte $E_2(i)$ und $E_2(\rho)$.