Modulformen - Übung 7

Dr. Markus Schwagenscheidt

20.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) Γ hat genau eine Spitze, die durch ∞ repräsentiert wird.

(2) $\Gamma_0(p)$ für eine Primzahl p hat genau zwei Spitzen, die durch ∞ und 0 repräsentiert werden.

Lösung.

(1) Es sei $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT}(a,c) = 1$. Dann gibt es $b, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$, also ist $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Außerdem gilt $M\infty = \frac{a}{c}$, d.h. $\frac{a}{c}$ ist äquivalent zu ∞ modulo Γ.

(2) Es sei $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT}(a,c) = 1$. Wir wählen wieder $b, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$, so dass $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $M\infty = \frac{a}{c}$. Es gibt nun zwei Fälle:
- $c \mid p$: Dann gilt schon $M \in \Gamma_0(p)$, also ist $\frac{a}{c}$ äquivalent zu ∞ modulo $\Gamma_0(p)$.
- $c \nmid p$: Wir können das Paar (b, d) durch das Paar $(b + na, d + nc)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ersetzen, ohne die Bedingung $ad - bc = 1$ zu verändern. Wählen wir $n = -\overline{c}d$, wobei $\overline{c} \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist mit $c\overline{c} \equiv 1 \pmod{p}$, so können wir erreichen, dass $p \mid d$ gilt. Dann liegt die Matrix $M' = \left(\begin{smallmatrix} -b & a \\ -d & c \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p)$ und erfüllt $M'0 = \frac{a}{c}$, das heißt, $\frac{a}{c}$ ist äquivalent zu 0 modulo $\Gamma_0(p)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass eine Matrix $M \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ genau dann parabolisch ist, wenn sie im Stabilisator eines $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ liegt. Bestimmen Sie außerdem den Stabilisator Γ_∞ von ∞ in Γ.

Lösung. Eine Matrix $M \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ ist per Definition genau dann parabolisch, wenn $|\operatorname{tr}(M)| = 2$, was nach einem Lemma aus der Vorlesung gleichbedeutend damit ist, dass M einen eindeutigen Fixpunkt $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ besitzt.

Ist $M \in \Gamma_\infty$, also $M\infty = M\frac{1}{0} = \frac{a}{c} = \infty$, so muss $c = 0$ sein. Umgekehrt liegt offenbar jede Matrix M mit $c = 0$ in Γ_∞, d.h. es gilt

$$\Gamma_\infty = \{M \in \Gamma : c = 0\} = \{\pm T^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dies ist übrigens auch genau die Untergruppe, die in der Definition der Eisensteinreihe $E_k = \sum_{M \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} 1|_k M$ auftaucht.

Aufgabe 3. Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Für eine Spitze $[s] \in \Lambda \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ wählen wir ein $L \in \Gamma$ mit $L\infty = s$ und definieren die Fourierentwicklung einer Modulform $f \in M_k(\Lambda)$ bei $[s]$ als

$$f|_k L = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,L}(n) q^{n/N}.$$

(1) Machen Sie sich klar, dass dies eigentlich nicht wohldefiniert ist: Wie ändert sich die Fourierentwicklung, wenn man s modulo Λ ändert, oder wenn man eine andere Matrix M mit $M\infty = s$ wählt?

(2) Zeigen Sie, dass die *Ordnung von f bei s*

$$\mathrm{ord}_s(f) = \mathrm{ord}_\infty(f|_k L) = \frac{1}{N}\min\{n \in \mathbb{N} : a_{f,L}(n) \neq 0\}$$

wohldefiniert ist, also nicht von der Klasse von s und von der Wahl von L abhängt.

Lösung.

(1) Ändert man s modulo Λ, betrachtet man also den Repräsentanten Ls für $L \in \Lambda$, so gilt $LM\infty = Ls$, und man betrachtet die Fourierentwicklung

$$f|_k LM = f|_k M,$$

das heißt, dadurch ändert sich die Fourierentwicklung nicht. Wählt man eine andere Matrix $M \in \Gamma$ mit $M\infty = s$, so folgt $L^{-1}M\infty = \infty$, also $L^{-1}M = \pm T^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Somit gilt (wir können annehmen dass k gerade ist)

$$f|_k M = f|_k LT^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,L}(n) e^{2\pi i mn/N} q^{n/N},$$

das heißt, die Koeffizienten der Entwicklung bei M unterscheiden sich um die Einheitswurzel $e^{2\pi i mn/N}$ von den Koeffizienten der Entwicklung bei L.

(2) In der letzten Teilaufgabe haben wir gesehen, dass die Koeffizienten sich bei anderer Wahl von s mod Λ oder anderer Wahl von $L \in \Gamma$ mit $L\infty = s$ nur um einen Faktor $\neq 0$ ändern. Insbesondere ist $\min\{n \in \mathbb{N} : a_{f,L}(n) \neq 0\}$ nicht von diesen Wahlen abhängig.

Aufgabe 4. Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe. Zeigen Sie, dass $M_0(\Lambda) = \mathbb{C}$ gilt.

Lösung. Es sei $\ell = [\Gamma : \Lambda]$ und $f \in M_0(\Lambda)$. Da $\mathbb{C} \subset M_0(\Lambda)$ gilt, ist $g = f - a_{f,I}(0) \in M_0(\Lambda)$. Außerdem verschwindet der konstante Term in der Fourierentwicklung von g bei ∞. Wir betrachten die Modulform

$$\pi(g) = \prod_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} g|_0 M \in M_0 = \mathbb{C},$$

also ist $\pi(g) \in \mathbb{C}$. Andererseits ist der konstante Term in der Fourierentwicklung von $\pi(g)$ gleich dem Produkt der konstanten Terme der Entwicklungen der $g_0|M$, und damit gleich 0. Somit folgt $\pi(g) = 0$, und nach dem Identitätssatz $g = 0$. Es folgt $f = a_{f,I}(0) \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}\left(E_{k,\Gamma_0(N)}\right) = E_k$ für gerade $k \geq 4$ gilt.

Lösung. Für $k \geq 4$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(E_{k,\Gamma_0(N)}\right) &= \sum_{L \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma} E_{k,\Gamma_0(N)}|_k L \\
&= \sum_{L \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma} \sum_{M \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} 1|_k M|_k L \\
&= \sum_{M \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \sum_{L \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma} 1|_k ML \\
&= \sum_{K \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma} 1|_k K \\
&= E_k
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $K = ML$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma_\infty\backslash\Gamma$ durchläuft, wenn $M \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)$ und $L \in \Gamma_0(N)\backslash\Gamma$ laufen.

Aufgabe 6. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Für $N \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = \begin{cases} N, & \text{falls } N \mid n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Ist p eine Primzahl und $f = \sum_{n=0}^\infty a_f(n)q^n \in M_k$, so ist

$$f|U_p = \sum_{\substack{n=0\\ p|n}}^\infty a_f(n)q^n \in M_k(\Gamma_0(p^2)).$$

Lösung.

(1) Für $N \mid n$ gilt $e^{2\pi i n\ell/N} = 1$ für alle ℓ und somit $\sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = N$. Für $N \nmid n$ ersetzen wir in der Summe ℓ durch $\ell+1$ und erhalten

$$\sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = \sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n(\ell+1)/N} = e^{2\pi i n/N} \sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N},$$

woraus

$$(1 - e^{2\pi i n/N}) \sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = 0$$

folgt, und wegen $e^{2\pi i n/N} \neq 1$ dann $\sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = 0$.

(2) Wir schreiben

$$f|U_p = \sum_{\substack{n=0\\ p|n}}^\infty a_f(n)e^{2\pi i n\tau} = \sum_{n=0}^\infty a_f(n)\frac{1}{p}\sum_{\ell(p)} e^{2\pi i n\ell/p}e^{2\pi i n\tau} = \frac{1}{p}\sum_{\ell(p)} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p^2)$ können wir also schreiben

$$f|U_p|_k M = \frac{1}{p}\sum_{\ell(p)} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Der Summand für $\ell = 0(p)$ ist $f|_k M = f$. Für $\ell \neq 0(p)$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \ell c/p & b + (1-ad)d\ell/pd^2\ell^2c/p^2 \\ c & d - cd^2\ell/p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d^2\ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die linke Matrix auf der rechten Seite liegt in Γ (da $p \mid c^2$ und $ad \equiv 1 \mod p$), also folgt

$$f|U_p|_k M = f + \frac{1}{p}\sum_{\substack{\ell(p)\\ \ell\neq 0}} f|_k \begin{pmatrix} 1 & d^2\ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p}\sum_{\ell(p)} f|_k \begin{pmatrix} 1 & \ell/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f|U_p,$$

wobei wir im letzten Schritt noch $d^2\ell$ mit ℓ ersetzt haben, was nur die Summationsreihenfolge ändert.

Aufgabe 7. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das $r_4(n)$ und $\sum_{d|n, 4\nmid d} d$ berechnet und vergleichen Sie die Ergebnisse für $1 \leq n \leq 10$.

Aufgabe 8. (Zusatzaufgabe) Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\pm I \in \Lambda$ gilt. Zeigen Sie die folgende Gewichtsformel: Für $0 \neq f \in M_k(\Lambda)$ gilt

$$\sum_{s \in \Lambda \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\Gamma_s : \Lambda_s] \operatorname{ord}_s(f) + \sum_{\tau \in \Lambda \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Lambda_\tau|} \operatorname{ord}_\tau(f) = \frac{k}{12} [\Gamma : \Lambda].$$

Dabei bezeichnen Λ_s bzw. Λ_τ die Stabilisatoren von $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bzw. $\tau \in \mathbb{H}$.

Lösungsskizze. Es sei $\ell = [\Gamma : \Lambda]$. Dann ist

$$\pi(f) = \prod_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} f|_k M \in M_{k\ell}.$$

Mit $f \neq 0$ gilt auch $\pi(f) \neq 0$, und die Gewichtsformel für Γ besagt

$$\operatorname{ord}_\infty(\pi(f)) + \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Gamma_\tau|} \operatorname{ord}_\tau(\pi(f)) = \frac{k\ell}{12}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_\infty(\pi(f)) &= \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} \operatorname{ord}_\infty(f|_k M) \\
&= \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} \operatorname{ord}_{M\infty}(f) \\
&= \sum_{s \in \Lambda \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\Gamma_s : \Lambda_s] \operatorname{ord}_s(f).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Gamma_\tau|} \operatorname{ord}_\tau(\pi(f)) &= \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Gamma_\tau|} \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} \operatorname{ord}_\tau(f|_k M) \\
&= \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Gamma_{M\tau}|} \operatorname{ord}_{M\tau}(f) \\
&= \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Lambda_{M\tau}| [\Gamma_{M\tau} : \Lambda_{M\tau}]} \operatorname{ord}_{M\tau}(f) \\
&= \sum_{\tau \in \Lambda \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Lambda_\tau|} \operatorname{ord}_\tau(f).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gewichtsformel für f.