Modulformen - Übung 8

Dr. Markus Schwagenscheidt

27.05.2019

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\mathrm{vol}(\mathcal{F}) = \frac{\pi}{3}$.

Lösung. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{vol}(\mathcal{F})} \frac{dxdy}{y^2} &= \int_{x=-1/2}^{1/2} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx \\ &= \int_{x=-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin(1/2) - \arcsin(-1/2) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Es seien $f, g \in M_k$, so dass f oder g eine Spitzenform ist. Dann gilt

(1) $\langle f, g \rangle$ ist linear in f und antilinear in g.
(2) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
(3) $\langle f, f \rangle \geq 0$ für $f \in S_k$ und $\langle f, f \rangle = 0$ nur für $f = 0$.

Lösung. Dies folgt sofort aus den Eigenschaften des Integrals.

Aufgabe 3. Es sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n \in M_k$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es gilt

$$f^c = \overline{f(-\overline{\tau})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_f(n)} q^n \in M_k.$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(f) &= \frac{1}{2}(f + f^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_f(n)) q^n \in M_k, \\ \mathrm{Im}(f) &= \frac{1}{2i}(f - f^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_f(n)) q^n \in M_k.\end{aligned}$$

(3) Es gilt $\langle f, f \rangle = \langle f^c, f^c \rangle$.

Lösung.

(1) Es ist klar, dass f^c holomorph auf $\mathbb{H}$ und bei ∞ ist, und dass f^c richtig unter T transformiert. Für die Transformation unter S haben wir

$$f^c(-1/\tau) = \overline{f(-1/(-\overline{\tau}))} = \overline{(-\overline{\tau})^k f(-\overline{\tau})} = \tau^k f^c(\tau),$$

wobei wir auch benutzt haben, dass wir annehmen können das k gerade ist.

(2) Das folgt sofort aus Teilaufgabe (1).

(3) Die Gleichung $\langle f, f\rangle = \langle f^c, f^c\rangle$ ist äquivalent zu

$$\int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{f(\tau)}y^k \frac{dxdy}{y^2} = \int_{\mathcal{F}} f(-\overline{\tau})\overline{f(-\overline{\tau})}y^k \frac{dxdy}{y^2}.$$

Diese Gleichung folgt sofort aus der Substitution $x \mapsto -x$.

Aufgabe 4. Es sei $k \geq 4$ gerade und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) Ist der m-te Fourierkoeffizient der m-ten Poincaréreihe $P_{m,k}$ gleich 0, so ist $P_{m,k} = 0$.

(2) $P_{m,k}$ hat reelle Fourierkoeffizienten.

(3) Es bezeichne $a_m(n)$ den n-ten Fourierkoeffizienten von $P_{m,k}$. Dann gilt

$$m^{k-1}a_m(n) = n^{k-1}a_n(m).$$

Lösung.

(1) Es gilt

$$\langle P_{m,k}, P_{m,k}\rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_{P_{m,k}}(m).$$

Ist $a_{P_{m,k}}(m) = 0$, so ist also auch $\langle P_{m,k}, P_{m,k}\rangle = 0$. Da das Skalarprodukt nicht-ausgeartet ist, folgt $P_{m,k} = 0$.

(2) Zunächst gilt nach der letzten Aufgabe

$$\overline{P_{m,k}(-\overline{\tau})} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_m(n)} q^n.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\overline{P_{m,k}(-\overline{\tau})} = P_{m,k}(\tau)$$

gilt. Wir setzen die Reihendarstellung ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\overline{P_{m,k}(-\overline{\tau})} &= \overline{\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (-c\overline{\tau}+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{-a\overline{\tau}+b}{-c\overline{\tau}+d}}} \\
&= \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (-c\tau+d)^{-k} e^{-2\pi i \frac{-a\tau+b}{-c\tau+d}} \\
&= \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (-c\tau+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{a\tau-b}{-c\tau+d}} \\
&= \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (c\tau+d)^{-k} e^{2\pi i \frac{a\tau+b}{c\tau+d}} \\
&= P_{m,k}(\tau),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Repräsentantensystem für $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}$ durchläuft.

(3) Wir berechnen

$$\begin{aligned} m^{k-1} a_m(n) &= m^{k-1} \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \langle P_{n,k}, P_{m,k} \rangle \\ &= n^{k-1} \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \overline{\langle P_{m,k}, P_{n,k} \rangle} \\ &= n^{k-1} \overline{a_n(m)} \\ &= n^{k-1} a_n(m), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben dass die Koeffizienten $a_n(m)$ reell sind.

Aufgabe 5. Es seien $f \in S_k$ und $g \in S_\ell$ mit $k, \ell, k-\ell \geq 4$ gerade. Dann gilt

$$\langle f, E_{k-\ell} \cdot g \rangle = (k-2)! \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \overline{a_g(n)} (4\pi n)^{1-k}.$$

Lösung. Wir berechnen mit dem Entfaltungstrick:

$$\begin{aligned} \langle f, E_{k-\ell} \cdot g \rangle &= \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(\tau) \overline{\sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_{k-\ell} M \cdot g(\tau)} \mathrm{Im}(\tau)^k d\mu(\tau) \\ &= \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(M\tau) \overline{g(M\tau)} \mathrm{Im}(M\tau)^k d\mu(M\tau) \\ &= \int_{\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}} f(\tau) \overline{g(\tau)} \mathrm{Im}(\tau)^k d\mu(\tau). \end{aligned}$$

Als Fundamentalbereich für $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}$ wählen wir den vertikalen Striefen $\{\tau \in \mathbb{H} : 0 \leq x \leq 1\}$. Wir setzen die Fourierentwicklungen von f, g ein und erhalten

$$\begin{aligned} \langle f, E_{k-\ell} \cdot g \rangle &= \int_0^\infty \int_0^1 f(x+iy) \overline{g(x+iy)} dx y^{k-2} dy \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} a_f(n) \overline{a_g(m)} \int_0^\infty \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i n(x+iy)} e^{-2\pi i m(x-iy)} dx}_{= e^{-4\pi n y} \text{ falls } m=n, \text{ und } 0 \text{ sonst.}} y^{k-2} dy \\ &= \sum_{n \geq 1} a_f(n) \overline{a_g(n)} \int_0^\infty e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\ &= \sum_{n \geq 1} a_f(n) \overline{a_g(n)} \Gamma(k-1) (4\pi n)^{1-k}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (Sage) Zeichnen Sie Fundamentalbereiche für $\Gamma_0(N)$ mit $1 \leq N \leq 10$.