Modulformen - Übung 9

Dr. Markus Schwagenscheidt

03.06.2019

Aufgabe 1. Es sei $k \geq 4$ gerade und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$T_n P_{m,k} = \sum_{d|(m,n)} (n/d)^{k-1} P_{mn/d^2,k}.$$

Lösung. Wir setzen die Definition des Hecke-Operators und der Poincaréreihe ein und berechnen

$$T_n P_{m,k} = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash M_n} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{2\pi i m\tau}|_k LM = n^{k-1} \sum_{A \in \Gamma_\infty \backslash M_n} e^{2\pi i m\tau}|_k A.$$

Ein Repräsentantensystem für $\Gamma_\infty \backslash M_n$ ist gegeben durch die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, d > 0, b \pmod{d}, L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma \right\}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_n P_{m,k} &= n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{-k} \sum_{b \pmod{d}} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{2\pi i m \frac{a\tau + b}{d}}|_k L = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d|m}} d^{1-k} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{2\pi i m \frac{a\tau}{d}}|_k L \\ &= \sum_{d|(n,m)} (n/d)^{1-k} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{2\pi i \frac{mn\tau}{d^2}}|_k L \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $a = n/d$ gesetzt haben. Die innere Summe ist gleich $P_{mn/d^2,k}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie direkt (ohne die Theorie der Hecke-Operatoren), dass

$$\sigma_{k-1}(p)\sigma_{k-1}(m) = \sigma_{k-1}(mp) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(m/p)$$

für $k > 1$, jede Primzahl p und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Leiten Sie daraus einen neuen Beweis dafür her, dass $T_n E_k = \sigma_{k-1}(n) E_k$ gilt.

Lösung. Setze $\alpha(n) = \sigma_{k-1}(n)$. Man macht sich zunächst leicht klar, dass $\alpha(n)$ multiplikativ ist. Wir zeigen die Formel aus der Aufgabe zuerst für $m = p^r$, also

$$\alpha(p)\alpha(p^r) = \alpha(p^{r+1}) + p^{k-1}\alpha(p^{r-1}).$$

Die folgt leicht aus

$$\alpha(p^r) = \sigma_{k-1}(p^r) = \sum_{j=0}^{r} p^j = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}.$$

Ist p teilerfremd zu m, so folgt die behauptete Formel aus der Multiplikativität von α. Ist p ein Teiler von m, so schreiben wir $m = p^r m'$ mit $(m', p) = 1$ und berechnen mithilfe der

Multiplikativität von α:

$$\begin{aligned}\alpha(p)\alpha(m) &= \alpha(p)\alpha(p^r)\alpha(m')\\ &= (\alpha(p^{r+1}) + p^{k-1}\alpha(p^{r-1}))\alpha(m')\\ &= \alpha(mp) + p^{k-1}\alpha(m/p).\end{aligned}$$

Aus der expliziten Fourierentwicklung von $T_p E_k$ folgt nun, dass E_k eine Eigenform von T_p ist. Da die Hecke-Algebra von den T_p mit p prim erzeugt wird, ist E_k eine simultane Eigenform.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Für eine Primzahl p und $r, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_{p^r} T_{p^s} = \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu}}.$$

Beweisen Sie die Aussage per Induktion nach s, indem Sie die Relation

$$T_{p^r} T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

für $r \in \mathbb{N}$ benutzen.

0.1. **Lösung.** Per Induktion nach s. Für $s = 0$ ist die Behauptung klar, und für $s = 1$ haben wir sie im letzten Satz gezeigt. Für $s > 1$ wir mit dem letzten Satz

$$\begin{aligned}T_{p^r} T_{p^{s+1}} &= T_{p^r}\left(T_{p^s} T_p - p^{k-1} T_{p^{s-1}}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu}} T_p - p^{k-1} \sum_{n=0}^{\min(r,s-1)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu-1}}\\ &= \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu+1}} + p^{k-1} \sum_{\substack{n=0\\ 2\nu+1\le r+s}}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu-1}}\\ &\quad - p^{k-1} \sum_{n=0}^{\min(r,s-1)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-1-2\nu}}\\ &= \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu+1}} + p^{k-1} \sum_{\nu} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu-1}},\end{aligned}$$

wobei die letzte Summe über alle ν mit

$$\min(r, s-1) < \nu \le \min(r, s), \quad 2\nu + 1 \le r + s,$$

läuft. Die letzte Summe ist also nur dann ungleich 0, wenn $s < r$, also $\min(r, s+1) = s + 1$ gilt. In diesem Fall besteht sie nur aus dem Term mit $\nu = s$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgende Identität formaler Potenzreihen:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^r\right)(1 - T_p X + p^{k-1} X^2) = 1.$$

Lösung. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^r\right)(1 - T_p X + p^{k-1}X^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^r - \sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} T_p X^{r+1} + p^{k-1} \sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^{r+2} \\ &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} T_{p^r} X^r - \sum_{r=1}^{\infty} T_{p^r} T_p X^{r+1} + p^{k-1} \sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^{r+2} \\ &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \Big(\underbrace{T_{p^r} - T_{p^{r-1}} T_p + p^{k-1} T_{p^{r-2}}}_{=0} \Big) X^r \\ &= 1,\end{aligned}$$

wobei wir die Relation $T_{p^{r-1}} T_p = T_{p^r} + p^{k-1} T_{p^{r-2}}$ für $r \geq 2$ benutzt haben.

Aufgabe 5. Es sei $f \in M_k$ und p ein Primzahl. Setze $f_p(\tau) = f(p\tau) \in M_k(\Gamma_0(p))$. Dann gilt $T_p f = p^{k-1} \operatorname{tr}(f_p)$.

Lösung. Wir schreiben

$$T_p f = p^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash M_p} f|_k M$$

und

$$\operatorname{tr}(f_p) = \sum_{M \in \Gamma_0(p) \backslash \Gamma} f_p|_k M = \sum_{M \in \Gamma_0(p) \backslash \Gamma} f \Big|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M.$$

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad b \pmod{p},$$

ein Repräsentantensystem für $\Gamma \backslash M_p$ sind. Dann sind auch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad b \pmod{p},$$

ein Repräsentantensystem für $\Gamma \backslash M_p$. Man zeigt nun leicht, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad b \pmod{p},$$

ein Repräsentantensystem für $\Gamma_0(p) \backslash \Gamma$ sind. Daraus folgt die Behauptung.