Modulformen - Übung 10

Dr. Markus Schwagenscheidt

17.06.2019

Aufgabe 1. Die *Möbiusfunktion* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\#\{\text{Primteiler von } n\}} & \text{falls } n \text{ quadratfrei,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei.} \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) μ ist multiplikativ.

(2) Es gilt

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

(3) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Lösung.

(1) Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(m, n) = 1$. Dann ist mn genau dann nicht quadratfrei, wenn m oder n nicht quadratfrei ist. Insbesondere gilt $\mu(mn) = 0$ genau dann wenn $\mu(m)\mu(n) = 0$ ist. Sind m, n beide quadratfrei, so können wir

$$m = p_1 \cdots p_\ell, \quad n = q_1 \cdots q_k$$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_k$ schreiben. Es folgt

$$\mu(mn) = \mu(p_1 \cdots p_\ell q_1 \cdots q_\ell) = (-1)^{\ell+k} = \mu(p_1 \cdots p_\ell)\mu(q_1 \cdots q_k) = \mu(m)\mu(n).$$

(2) Da μ multiplikativ ist, gilt $\mu(1) = 1$, und wir können für $n > 1$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \prod_{p \mid n} \left(\sum_{d \mid p^{\nu_p(n)}} \mu(d) \right)$$

schreiben. Für $p \mid n$ gilt nun per Definition von μ

$$\sum_{d \mid p^{\nu_p(n)}} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \cdots + \mu(p^{\nu_p(n)}) = 1 + (-1) = 0.$$

(3) Wir berechnen

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)(mn)^{-s} \overset{mn=\ell}{=} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{d \mid \ell} \mu(d) \ell^{-s} = 1 + \sum_{\ell=2}^{\infty} \underbrace{\sum_{d \mid \ell} \mu(d)}_{=0} \ell^{-s} = 1.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zetafunktion für $\mathrm{Re}(s) > 1$ als Eulerprodukt

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

darstellbar ist.

Lösung. Da $n \mapsto n^{-s}$ multiplikativ ist gilt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} (p^r)^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} (p^{-s})^r = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

wobei wir die geometrische Reihe verwendet haben.

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : (a, n) = 1\} = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Lösung. Da $\varphi(n)n^{-s}$ multiplikativ ist, können wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(p^r) p^{-rs}$$

schreiben. Außerdem gilt

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}, \quad r \geq 1.$$

(da $|\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}| = p^r$, und in $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ genau p^{r-1} Elemente durch p teilbar sind). Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} &= \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} (p^r - p^{r-1}) p^{-rs} \right) = \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} p^{r(1-s)} - p^{-s} \sum_{r=0}^{\infty} p^{r(1-s)} \right) \\ &= \prod_p \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{(-s-1)}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ sei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ die Gammafunktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. *Hinweis:* Partielle Integration.
(2) $\Gamma(s)$ lässt sich meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, mit einfachen Polen genau bei den nichtpositiven ganzen Zahlen $0, -1, -2, -3, \ldots$. *Hinweis:* Benutzen Sie die vorige Teilaufgabe induktiv.

Lösung.

(1) Wir berechnen mit partieller Integration für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = [-e^{-t}t^s]_0^\infty - s\int_0^\infty (-e^{-t})t^{s-1}dt = s\Gamma(s).$$

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $\mathrm{Re}(s) > -n$ folgt aus $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ induktiv die Gleichung

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)(s+n-2)\cdots(s+1)s}$$

Die rechte Seite ist meromorph für $\mathrm{Re}(s) > -n$, und hat einfache Pole genau bei $s = 0, -1, -2, \ldots, -(n-1)$. Dies liefert die meromorphe Fortsetzung von Γ.

Aufgabe 5. Es sei $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ die vervollständigte Riemannsche Zetafunktion. Zeigen Sie die Integraldarstellung

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(it/2) - 1)(t^{s/2} + t^{-s/2+1/2})\frac{dt}{t} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s},$$

mit der Jacobischen Thetafunktion $\vartheta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$. Leiten Sie daraus die meromorphe Fortsetzbarkeit nach ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen bei $s = 0$ und $s = 1$ und die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

her.

Zeigen Sie insbesondere, dass $\zeta(s)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist mit einem einfachen Pol bei $s = 1$, und dass $\zeta(s)$ Nullstellen bei allen geraden negativen Zahlen hat.

Lösung. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\xi(2s) &= \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) \\
&= \pi^{-s}\int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy \sum_{n=1}^\infty n^{-2s} \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 y}y^{s-1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} e^{-\pi n^2 y}y^{s-1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)y^{s-1}dy
\end{aligned}$$

Wir spalten das Integral bei $y = 1$ auf, ersetzen im Integral $\int_0^\infty$ $y \mapsto 1/y$ und benutzen die Thetatransformationsformel $\vartheta(i/2y) = \sqrt{y}\vartheta(iy/2)$ für $y > 0$:

$$\begin{aligned}
\xi(2s) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)y^{s-1}dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(i/2y) - 1)y^{-s-1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)y^{s-1}dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\sqrt{y}\vartheta(iy/2) - 1)y^{-s-1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)y^{s-1}dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)y^{-s-1/2}dy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-s-1/2} - y^{-s-1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(iy/2) - 1)(y^s + y^{-s+1/2})\frac{dy}{y} + \frac{1}{2s-1} - \frac{1}{2s}.
\end{aligned}$$

Ersetzen wir $2s$ durch s, so erhalten wir die behauptete Integraldarstellung. Da $\vartheta(iy/2) - 1$ für $y \to \infty$ exponentiell abklingt, konvergiert das Integral und definiert eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$. Die Terme $\frac{1}{s-1}$ und $\frac{1}{s}$ liefern einfache Pole bei $s = 0$ und $s = 1$.

Durch Einsetzen von $1 - s$ und s sieht man an dieser Darstellung auch direkt die Funktionalgleichung $\xi(1 - s) = \xi(s)$.

Da $\xi(s)$ und $\Gamma(s/2)$ bei $s = 0$ beide einen einfachen Pol haben, muss $\zeta(s)$ bei $s = 0$ holomorph sein. Da außerdem $\xi(s)$ bei allen negativen geraden Zahlen holomorph ist, aber $\Gamma(s/2)$ dort Pole hat, muss $\zeta(s)$ bei den negativen geraden Zahlen Nullstellen haben, die die Pole von $\Gamma(s/2)$ kompensieren.

Aufgabe 6. Zeigen Sie für gerade $k \geq 4$

$$L_{E_k}(s) = -\frac{2k}{B_k}\zeta(s)\zeta(s + 1 - k).$$

Zeigen Sie mithilfe der letzten Aufgabe, dass die *vervollständigte L-Funktion*

$$\Lambda_{E_k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{E_k}(s)$$

eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen bei $s = 0$ und $s = k$ besitzt.

Lösung. Wegen $a_{E_k}(n) = -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n)$ haben wir

$$L_{E_k}(s) = -\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^\infty \sigma_{k-1}(n)n^{-s}.$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \sigma_{k-1}(n)n^{-s} &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{d|n} d^{k-1}n^{-s} \overset{n=md}{=} \sum_{m=1}^\infty \sum_{d=1}^\infty d^{k-1}(md)^{-s} = \sum_{m=1}^\infty m^{-s} \sum_{d=1}^\infty d^{-s+k-1} \\
&= \zeta(s)\zeta(s + 1 - k).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Gleichung. Alle Funktionen auf der rechten Seite von

$$\Lambda_{E_k}(s) = -\frac{2k}{B_k}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s + 1 - k)$$

haben eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$. Die einzigen möglichen Pole kommen von den Polen von $\Gamma(s)$ bei nicht-positiven ganzen Zahlen, sowie den Polen bei $s = 1$ von $\zeta(s)$ und bei $s = k$ von $\zeta(s+1-k)$. Die Pole von $\Gamma(s)$ bei allen negativen ganzen Zahlen heben sich mit Nullstellen von $\zeta(s)\zeta(s+1-k)$ auf ($\zeta(s)$ hat Nullstellen bei geraden negativen Zahlen, $\zeta(s+1-k)$ bei ungeraden negativen Zahlen), und der Pol bei $s = 1$ von $\zeta(s)$ hebt sich mit einer Nullstelle von $\zeta(s+1-k)$ bei $s = 1$ auf. Insbesondere hat $\Lambda_{E_k}(s)$ eine Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen bei $s = 0$ (von $\Gamma(s)$) und $s = k$ (von $\zeta(s+1-k)$).