Modulformen - Übung 11

Dr. Markus Schwagenscheidt

24.06.2019

Aufgabe 1. Es sei $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \in S_k$. Zeigen Sie die Darstellung

$$\Lambda_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^s}\Gamma(s, 2\pi n) + i^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^{k-s}}\Gamma(k-s, 2\pi n),$$

wobei $\Gamma(s,x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{s-1}dx$ die unvollständige Gammafunktion ist. Zeigen Sie, dass die rechte Seite für alle $s \in \mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, und somit eine holomorphe Fortsetzung für $\Lambda_f(s)$ darstellt.

Lösung. Wir haben in der Vorlesung die Integraldarstellung

$$\Lambda_f(s) = \int_1^\infty f(iy)\left(y^s + i^k y^{k-s}\right)\frac{dy}{y}$$

für $\mathrm{Re}(s) > k$ gezeigt. Einsetzen der Fourierentwicklung und Vertauschen von Integral und Summe ergibt

$$\begin{aligned}
\Lambda_f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \int_1^\infty e^{-2\pi n y}\left(y^s + i^k y^{k-s}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \int_1^\infty e^{-2\pi n y} y^s \frac{dy}{y} + i^k \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \int_1^\infty e^{-2\pi n y} y^{k-s}\frac{dy}{y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^s}\Gamma(s, 2\pi n) + i^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^{k-s}}\Gamma(k-s, 2\pi n).
\end{aligned}$$

Es sei $K \subset \mathbb{H}$ kompakt und $\sigma_0 = \min\{\mathrm{Re}(s) : s \in K\}$. Wir haben für $x \geq 1$ und $s \in K$ die einfache Abschätzung

$$|\Gamma(s,x)| \leq \int_x^\infty e^{-t}t^{\sigma_0 - 1}dt = \int_x^\infty e^{-t/2}e^{-t/2}t^{\sigma_0-1}dt \leq e^{-x/2}\int_1^\infty e^{-t/2}t^{\sigma_0-1}dt = C_K e^{-x/2},$$

wobei $C_K > 0$ eine Konstante ist, die von K, aber nicht von σ abhängt. Zusammen mit der Hecke bound $a_f(n) = O(n^{k/2})$ folgt nun leicht die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe in der Aufgabe.

Aufgabe 2. Ein *Dirichlet-Charakter* mod N ist ein Homomorphismus

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Wir fassen χ als Funktion auf $\mathbb{Z}$ auf mittels $\chi(n) = 0$ für $(n,N) > 1$. Der triviale Dirichlet-Charakter mod N ist definiert durch

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (n,N) = 1, \\ 0, & \text{falls } (n,N) > 1, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Der *Führer* von χ ist die kleinste natürliche Zahl N' so dass man $\chi = \chi_0\chi'$ schreiben kann, wobei χ_0 der triviale Charakter mod N und χ' ein Dirichlet-Charakter mod N' ist. Ein

Dirichlet-Charakter χ heißt *primitiv*, falls der Modulus N von χ gleich dem Führer von χ ist. *Wir nehmen in der ganzen Aufgabe an, dass χ primitiv mit Führer N ist!*

(1) Für einen Dirichlet-Charakter χ mod N und $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$G(\chi, n) = \sum_{a(N)} \chi(a) e^{2\pi i n a/N}$$

die n-te *Gauss-Summe* von χ. Wir setzen $G(\chi) = G(\chi, 1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt

$$G(\chi, n) = \overline{\chi}(n) G(\chi).$$

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung nach $(n, N) = 1$ und $(n, N) > 1$. Für $(n, N) > 1$ zeigen Sie $G(\chi, n) = 0$ mithilfe der folgenden Aussage (die sie ohne Beweis verwenden können): Für jeden Teiler $d \mid N$ mit $d < N$ gibt es ein $\alpha \equiv 1 \pmod{d}$ mit $(\alpha, N) = 1$ und $\chi(\alpha) \neq 1$.

(b) Es gilt

$$|G(\chi)|^2 = N.$$

(2) Wir nehmen nun an, dass χ *gerade* ist, das heißt $\chi(-1) = 1$. Zeigen Sie mithilfe der Poissonschen Summenformel, dass die Thetareihe $\vartheta_\chi(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{\pi i n^2 \tau}$ die Transformationsformel

$$\vartheta_{\overline{\chi}}(i/N^2 y) = \frac{N\sqrt{y}}{G(\chi)} \vartheta_\chi(iy)$$

für $y > 0$ erfüllt.

(3) Wir nehmen wieder an, dass χ gerade ist. Wir betrachten die *Dirichlet-L-Funktion*

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s},$$

die für $\mathrm{Re}(s) > 1$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass die vervollständigte Dirichlet-L-Funktion

$$\Lambda(\chi, s) = \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-s/2} \Gamma(s/2) L(\chi, s)$$

eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzt und die Funktionalgleichung

$$\Lambda(\overline{\chi}, 1 - s) = \frac{\sqrt{N}}{G(\chi)} \Lambda(\chi, s)$$

erfüllt. Zeigen Sie insbesondere, dass $\Lambda(\chi, s)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, falls χ nicht trivial ist.

Hinweis: Schreiben Sie $\Lambda(\chi, s)$ als Integral über ϑ_χ und benutzen Sie die Transformationsformel aus der letzten Teilaufgabe.

(4) Zeigen Sie

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Lösung.

(1) (a) Ist $(n,N)=1$, so können wir a durch $n^{-1}a$ ersetzen, wobei n^{-1} ein Inverses von n modulo N bezeichnet. In diesem Fall erhalten wir

$$G(\chi,n)=\sum_{a(N)}\chi(a)e^{2\pi ina/N}=\chi(n)^{-1}\sum_{a(N)}\chi(a)e^{2\pi ia/N}=\overline{\chi}(n)G(\chi).$$

Ist $(n,N)>1$, so ist $\overline{\chi}(n)=0$. Wir müssen also zeigen, dass $G(\chi,n)=0$ gilt. Setze $d=N/(n,N)$. Nach der letzten Teilaufgabe gibt es ein $\alpha\equiv 1 \pmod d$ mit $(\alpha,N)=1$ und $\chi(\alpha)\neq 1$. Ersetzen wir a durch αa, so erhalten wir

$$G(\chi,n)=\sum_{a(N)}\chi(a)e^{2\pi ina/N}=\chi(\alpha)\sum_{a(N)}\chi(a)e^{2\pi ina\alpha/N}=\chi(\alpha)G(\chi,n),$$

wobei wir benutzt haben, dass $n\alpha\equiv n \pmod N$ wegen $\alpha\equiv 1 \pmod d$ gilt. Wegen $\chi(\alpha)\neq 1$ folgt $G(\chi,n)=0$.

(b) Wir berechnen

$$|G(\chi)|^2=G(\chi)\overline{G(\chi)}=\sum_{a(N)}\sum_{b(N)}\chi(a)\overline{\chi}(b)e^{2\pi i(a-b)/N}$$

Wir können die Summe über b einschränken auf $(b,N)=1$, da $\overline{\chi}(b)$ ansonsten verschwindet. Dann können wir a ersetzen durch ab und erhalten

$$|G(\chi)|^2=\sum_{a(N)}\sum_{b(N)^*}\chi(a)e^{2\pi ib(a-1)/N}$$

Die Summe über a ist eine Gausssumme. Diese verschwindet, falls $(b,N)>1$ nach der letzten Teilaufgabe. Daher können wir wieder über alle b mod N summieren. Die Summe über b ist dann gleich N, falls $a\equiv 1 \pmod N$, und 0 andernfalls. In der Summe über a bleibt also nur der Summand für $a=1 \pmod N$ übrig. Daraus folgt $|G(\chi)|^2=N$.

(2) Wir berechnen

$$\vartheta_\chi(iy)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)e^{-\pi n^2y}=\sum_{a(N)}\chi(a)\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv a(N)}}e^{-\pi n^2 y}.$$

Die innere Summe schreiben wir als

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv a(N)}}e^{-\pi n^2 y}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\pi(mN+a)^2y}.$$

Mithilfe der Poissonschen Summenformel haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(mN+a)^2y} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(xN+a)^2y} e^{-2\pi ixk} dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+a)^2y} e^{-2\pi ixk/N} dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iak/N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2y} e^{-2\pi ixk/N} dx \\
&= \frac{1}{N\sqrt{y}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iak/N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixk/\sqrt{y}N} dx \\
&= \frac{1}{N\sqrt{y}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iak/N} e^{-\pi(k/\sqrt{y}N)^2},
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Fouriertransformierte von $e^{-\pi x^2}$ wieder gleich $e^{-\pi x^2}$ ist. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\vartheta_\chi(iy) &= \sum_{a(N)} \chi(a) \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv a(N)}} e^{-\pi n^2 y} \\
&= \frac{1}{N\sqrt{y}} \sum_{a(N)} \chi(a) \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iak/N} e^{-\pi(k/\sqrt{y}N)^2} \\
&= \frac{1}{N\sqrt{y}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(\chi,k) e^{-\pi k^2/yN^2} \\
&= \frac{G(\chi)}{N\sqrt{y}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\chi}(k) e^{-\pi k^2/yN^2} \\
&= \frac{G(\chi)}{N\sqrt{y}} \vartheta_{\overline{\chi}}(i/yN^2),
\end{aligned}$$

wobei wir $G(\chi,k) = \overline{\chi}(k)G(\chi)$ benutzt haben.

(3) Wir nehmen an, dass χ nicht-trivial ist (also $N > 1$, da χ primitiv). Wie im Beweis der Integraldarstellung der Riemannschen Zetafunktion erhält man

$$\Lambda(\chi,s) = \frac{N^{s/2}}{2}\int_0^\infty \vartheta_\chi(iy)y^s\frac{dy}{y} = \frac{N^s}{2}\int_{1/N}^\infty \vartheta_\chi(iy)y^s\frac{dy}{y} + \frac{N^s}{2}\int_0^{1/N} \vartheta_\chi(iy)y^s\frac{dy}{y}.$$

Im Integral $\int_0^{1/N}$ ersetze y durch $1/N^2y$. Unter Benutzung der Transformationsformel von ϑ_χ erhält man nach kurzer Rechnung

$$\Lambda(\chi,s) = \frac{N^{s/2}}{2}\int_{1/N}^\infty \vartheta_\chi(iy)y^{s/2}\frac{dy}{y} + \frac{N^{1-s/2}}{G(\overline{\chi})}\int_{1/N}^\infty \vartheta_{\overline{\chi}}(iy)y^{(1-s)/2}\frac{dy}{y}.$$

Die Integrale konvergieren absolut, da $\vartheta_\chi(iy)$ schnell abklingt für $y \to \infty$. Somit erhält man die holomorphe Fortsetzung von $\Lambda(\chi,s)$ auf ganz $\mathbb{C}$. Die Funktionalgleichung erhält man ebenfalls leicht aus dieser Darstellung, unter Benutzung von $|G(\chi)|^2 = N$.

(4) Da χ stark muliplikativ ist, gilt

$$L(\chi, s) = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} \chi(p^r) p^{-rs} = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} (\chi(p) p^{-s})^r = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}.$$

Aufgabe 3. (Sage) Schreiben Sie ein Programm, dass die vervollständigte L-Reihe $\Lambda_f(s)$ einer Spitzenform bei beliebigem $s \in \mathbb{C}$ auswertet. Benutzen Sie dafür die Darstellung aus Aufgabe 1.