Modulformen - Übung 12

Dr. Markus Schwagenscheidt

01.07.2019

Aufgabe 1.

(1) Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den antilinearen Differentialoperator

$$\xi_k f = 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} f}$$

für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\xi_k(f|_k M) = (\xi_k f)|_{2-k} M$$

für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

(2) Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den Gewicht k invarianten Laplace-Operator

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie

$$\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k.$$

Folgen Sie daraus, dass

$$\Delta_k(f|_k M) = (\Delta_k f)|_k M$$

für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt.

(3) Es sei

$$E_k(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s|_k M$$

die normalisierte nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht k. Zeigen Sie die Differentialgleichung

$$\Delta_k E_k(\tau, s) = s(1 - s - k) E_k(\tau, s)$$

Lösung. Aufgabenteile (1) und (2) folgen durch einfache Rechnungen. Zu Teil (3): Wir berechnen

$$\Delta_k E_k(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \Delta_k(y^s|_k M) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\Delta_k y^s)|_k M.$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$\Delta_k y^s = \left(-y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - ky \frac{\partial}{\partial y} \right) y^s = -s(s-1)y^s - ksy^s = s(1-s-k)y^s.$$

Daraus folgt

$$\Delta_k E_k(\tau, s) = s(1 - s - k) E_k(\tau, s)$$

Aufgabe 2. Wir wollen mithilfe der nicht-holomorphen Eisensteinreihe einen neuen Beweis für die Modularität der Gewicht 2 Eisensteinreihe

$$E_2^*(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n - \frac{3}{\pi y}$$

geben. *Wir nehmen dazu an, dass wir noch nicht gezeigt haben, dass das unendliche Produkt*

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

eine Modulform vom Gewicht 12 *ist*, denn beim Beweis dieser Tatsache haben wir die Modularität von E_2^* bereits benutzt.

(1) Machen Sie sich klar, dass die Koeffizienten $a_n(\tau)$ in der Laurententwicklung $G^*(\tau,s) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(\tau)(s-1)^n$ invariant unter Γ sind. Insbesondere ist die Funktion

$$f(\tau) = \log\left(y^6 \left| q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\right|\right)$$

invariant unter Γ.

(2) Zeigen Sie, dass $\xi_0 f(\tau)$ ein Vielfaches von E_2^* ist, und leiten Sie daraus die Modularität von E_2^* her.

Lösung.

(1) Wir schreiben

$$G^*(\tau,s) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(\tau)(s-1)^n$$

für die Laurententwicklung von $G^*(\tau,s)$ bei $s=1$. Da $G^*(\tau,s)$ invariant unter Γ ist, gilt

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n(M\tau)(s-1)^n = G^*(M\tau,s) = G^*(\tau,s) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(\tau)(s-1)^n$$

für $M \in \Gamma$. Aus der Eindeutigkeit der Laurentkoeffizienten folgt $a_n(M\tau) = a_n(\tau)$ für alle n.

(2) Die Kroneckersche Grenzformel besagt, dass die Laurententwicklung von $G^*(\tau,s)$ bei $s=-1$ die Form

$$G^*(\tau,s) = \frac{1}{2}(s-1)^{-1} - \frac{1}{12}\log\left(y^6 \left| q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\right|\right) + C + O(s-1)$$

mit einer Konstante C besitzt. Daraus folgt, dass die Funktion

$$f(\tau) = \log\left(y^6 \left| q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\right|\right)$$

invariant unter Γ ist. Daher transformiert $\xi_0 f(\tau)$ wie eine Modulform vom Gewicht 2. Andererseits zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$\xi_0 f(\tau) = -2\pi\left(-\frac{3}{\pi y} + 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right) = -2\pi E_2^*(\tau).$$

Damit transformiert $E_2^*(\tau)$ wie eine Modulform vom Gewicht 2.

Aufgabe 3. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ hat. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(1) Nehmen Sie an, es gilt $\zeta(1 + i\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\zeta(2s_0)$ und $\zeta(2s_0 - 1)$ bei $s_0 = \frac{1}{2}(1 + i\alpha)$ verschwinden.

(2) Zeigen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} G(\tau, s)G(\tau, \tfrac{1}{2}(1 + i\alpha))d\mu(\tau) = 0$$

für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(3) Setzen Sie $s = \overline{s_0} = \frac{1}{2}(1 - i\alpha)$ ein und folgern Sie $G(\tau, \frac{1}{2}(1 + i\alpha)) = 0$, um einen Widerspruch zu erhalten.

Lösung.

(1) Nach Annahme gilt $\zeta(2s_0) = 0$. Mit der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ erhalten wir

$$\pi^{-s_0+1/2}\Gamma(s_0 - 1/2)\zeta(2s_0 - 1) = \pi^{s_0-1}\Gamma(1 - s_0)\zeta(2 - 2s_0).$$

Beachte, dass $1 - s_0 = \frac{1}{2}(1 - i\alpha) = \overline{s_0}$ und

$$\zeta(2 - 2s_0) = \zeta(2\overline{s_0}) = \overline{\zeta(2s_0)} = 0.$$

Die Γ-Faktoren in der obigen Gleichung haben keine Pole, daher folgt $\zeta(2s_0 - 1) = 0$.

(2) Mit dem Entfaltungstrick folgt, dass das Integral ein Vielfaches von

$$\int_0^\infty \int_0^1 G(\tau, s_0)dxy^{s-2}dy$$

ist. Das innere Integral ist gleich dem 0-ten Koeffizienten von $G(\tau, \frac{1}{2}(1 + i\alpha))$, also

$$\int_0^1 G(\tau, s_0)dx = \zeta(2s_0)y^{s_0} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s_0 - 1/2)}{\Gamma(s_0)}y^{1-s_0}\zeta(2s_0 - 1) = 0$$

nach der letzten Teilaufgabe.

(3) Mit $s = \overline{s_0} = 1 - s_0$ folgt

$$0 = \int_{\mathcal{F}} G(\tau, \overline{s_0})G(\tau, s_0)d\mu(\tau) = \int_{\mathcal{F}} |G(\tau, s_0)|^2 d\mu(\tau),$$

also $G(\tau, s_0) = 0$ für alle τ. Man sieht andererseits, dass die Koeffizienten in der Fourierentwicklung von $G(\tau, s_0)$ vom Index $n > 0$ nicht verschwinden, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das modulare Polynom $F_2(X, Y)$ vom Grad 2.

Lösung. Für $n = 2$ ist $r = \sigma_1(2) = 3$. Es sei M_1, M_2, M_3 ein Repräsentantensystem für $\Gamma\backslash M_2$. Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned}
F_2(X, j(\tau)) &= (X - j(M_1\tau))(X - j(M_2\tau))(X - j(M_3\tau)) \\
&= X^3 - \underbrace{(j(M_1\tau) + j(M_2\tau) + j(M_3\tau))}_{e_1} X^2 \\
&\quad + \underbrace{(j(M_1\tau)j(M_2\tau) + j(M_1\tau)j(M_3\tau) + j(M_2\tau)j(M_3\tau)}_{e_2} X \\
&\quad - \underbrace{j(M_1)j(M_2\tau)j(M_3\tau)}_{e_3}.
\end{aligned}$$

Als nächstes drücken wir die elementarsymmetrischen Polynome e_1, e_2, e_3 als rationale Polynome in den Potenzsummen $p_m(X_1, X_2, X_3) = X_1^m + X_2^m + X_3^m$ aus. Es gilt

$$\begin{aligned}
e_1 &= p_1, \\
e_2 &= \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2, \\
e_3 &= \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Nun drücken wir

$$p_m(j(M_1\tau), j(M_2\tau), j(M_3\tau)) = 2T_2(j^m(\tau)) \tag{2}$$

als rationales Polynom in j aus. Wir haben die Fourierentwicklungen

$$\begin{aligned}
j &= q^{-1} + 744 + \dots \\
j^2 &= q^{-2} + 1488q^{-1} + 947304 + \dots \\
j^3 &= q^{-3} + 2232q^{-2} + 2251260q^{-1} + 1355202240 + \dots \\
j^4 &= q^{-4} + 2976q^{-3} + 4108752q^{-2} + 3491078528q^{-1} + 2042124031080 + \dots \\
j^5 &= q^{-5} + 3720q^{-4} + 6519780q^{-3} + 7155410560q^{-2} + 5513263714410q^{-1} + 3169342733223744 + \dots \\
j^6 &= q^{-6} + 4464q^{-5} + 9484344q^{-4} + 12760029120q^{-3} + 12201350623740q^{-2} + 8823366817757280q^{-1} \\
&\qquad + 5013246606424410816 + \dots
\end{aligned}$$

Mit der expliziten Formel

$$T_2 f = \sum_{m=2m_0}^{\infty} \sum_{d|(2,m)} d^{-1} a_f(2m/d^2) q^m$$

für modulare Funktionen $f = \sum_{m=m_0} a_f(m)q^m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
2T_2(j) &= q^{-2} + 2232 + \dots \\
&= j^2 - 1488j + 162000, \\
2T_2(j^2) &= q^{-4} + 1488q^{-2} + 2q^{-1} + 2841912 + \dots \\
&= j^4 - 2976j^3 + 2535168j^2 - 563658750j + 8748000000, \\
2T_2(j^3) &= q^{-6} + 2232q^{-4} + 2251260q^{-2} + 4464q^{-1} + 4065606720 + \dots \\
&= j^6 - 4464j^5 + 7123968j^4 - 4856659968j^3 + 1309851648000j^2 \\
&\qquad - 97944248250000j + 472392000000000.
\end{aligned}$$

Wir ersetzen in den obigen Polynomen j durch Y. Dann benutzen wir (2) und (1), um $F_2(X, Y)$ zu erhalten. Zum Beispiel ergibt sich der konstante Term

$$-\left(\frac{1}{6}(162000)^3 - \frac{1}{2} \cdot 162000 \cdot 8748000000 + \frac{1}{3} \cdot 472392000000000\right) = -157464000000000.$$

Analog findet man die Terme bei Y, Y^2, Y^3. Wir erhalten das Polynom $F_2(X, Y)$ wie in der Vorlesung angegeben.

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe) Es seien $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \in S_k$ normierte simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren. Wir können ihr L-Funktionen in der Form

$$\begin{aligned}
L_f(s) &= \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p (1 - \alpha_p p^{-s})^{-1}(1 - \beta_p p^{-s})^{-1} \\
L_g(s) &= \prod_p (1 - b_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p (1 - \gamma_p p^{-s})^{-1}(1 - \delta_p p^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

mit geeigneten $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p \in \mathbb{C}$ schreiben. Zeigen Sie die Eulerprodukt-Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s} = \zeta(2s - 2k + 2) \prod_p \big((1 - \alpha_p\gamma_p p^{-s})(1 - \alpha_p\delta_p p^{-s})(1 - \beta_p\gamma_p p^{-s})(1 - \beta_p\delta_p p^{-s})\big)^{-1}.$$

Lösung. Eine Lösung findet sich in Corollary 0.0.2 in Paul Garretts Notizen unter
`http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/v/basic_rankin_selberg.pdf`