Modulformen - Übung 13

Dr. Markus Schwagenscheidt

08.07.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass n und $4n+1$ für $n \in \mathbb{N}$ nicht beides Quadrate sein können.

Lösung. Mit n wäre auch $4n$ ein Quadrat. Wir zeigen, dass m und $m+1$ für $m \in \mathbb{N}$ nicht beides Quadrate sein können. Wäre $m = a^2$ und $m+1 = b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, so wäre

$$1 = m + 1 - m = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

also $b - a = b + a = \pm 1$, woraus $a = 0$ und $b = \pm 1$ folgt, also $m = 0$, im Widerspruch zu $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Sind $a, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad = n$ und $|a - d| = 1$, so it $4n+1$ ein Quadrat.

Lösung. Wir schreiben

$$4n + 1 = 4ad + 1 = 4ad + (a-d)^2 = 4ad + a^2 - 2ad + d^2 = a^2 + 2ad + d^2 = (a+d)^2.$$

Aufgabe 3. Es sei $(B(d))_{d \geq -1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $B(d) = 0$ für $d \not\equiv 0, 3 \pmod 4$.

(1) Zeigen Sie, dass die beiden Relationen

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} B(4n - r^2) = 0,$$
$$\sum_{r > 0} r^2 B(4n - r^2) = 240\sigma_3(n),$$

mit $\sigma_3(0) = \frac{1}{240}$ die Folge $B(d)$ bereits eindeutig festlegen.

(2) Zeigen Sie, dass die beiden Relationen äquivalent sind zu den Relationen

$$\sum_{|r| < 2\sqrt{n}} B(4n - r^2) = \begin{cases} 4, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ -2, & \text{falls } 4n+1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\sum_{1 \leq r < 2\sqrt{n}} r^2 B(4n - r^2) = 240\sigma_3(n) + \begin{cases} 8n, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ -(4n+1), & \text{falls } 4n+1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung.

(1) Wir zeigen per Induktion, dass $B(d)$ durch die beiden angegebenen Relationen eindeutig bestimmt ist. Für $d = -1$ haben wir mit der zweiten Relation und $n = 0$:

$$1 = 240\sigma_3(0) = \sum_{r > 0} r^2 B(-r^2) = B(-1),$$

also ist $B(-1) = 1$ festgelegt. Nun sei $d > -1$ mit $d \equiv 0, 3 \pmod 4$ fest gewählt, und wir nehmen an, dass $B(d')$ für $d' < d$ bestimmt sind. Ist $d \equiv 0 \pmod 4$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d = 4n$. Die erste Relation liefert

$$B(4n) = -2 \sum_{1 \le r \le \sqrt{4n+1}} B(4n - r^2),$$

also ist $B(d)$ festgelegt. Ist $d \equiv 3 \pmod 4$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d = 4n-1$. Die zweite Relation liefert

$$B(4n-1) = 240\sigma_3(n) - \sum_{2 \le r \le \sqrt{4n+1}} r^2 B(4n - r^2),$$

also ist $B(d)$ in diesem Fall ebenfalls festgelegt.

(2) Zunächst gilt

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} B(4n - r^2) = \sum_{|r| \le \sqrt{4n+1}} B(4n - r^2),$$

da $B(d) = 0$ für $d < -1$. Die Terme $r = \pm\sqrt{4n+1}$ tauchen genau dann auf, wenn $4n+1$ ein Quadrat ist, und der zugehörige Summand ist $B(-1) = 1$. Damit erhalten wir

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} B(4n - r^2) = \sum_{|r| \le \sqrt{4n}} B(4n - r^2) + \begin{cases} -2, & \text{falls } 4n+1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Terme $r = \pm\sqrt{4n}$ tauchen genau dann auf, wenn n ein Quadrat ist, und der zugehörige Term ist $B(0) = -2$. Da n und $4n+1$ nicht gleichzeitig Quadrate sind, erhalten wir die Formel wie oben angegeben.

Die zweite Formel kann man in analoger Weise umschreiben.

Aufgabe 4. Es sei $F_n(X, Y)$ das n-te modulare Polynom. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tau \mapsto F_n(j(\tau), j(\tau))$ ihre Nullstellen genau bei den CM-Punkten z_Q zu quadratischen Formen $Q \in \mathcal{Q}_{4n-r^2}$ für $r \in \mathbb{Z}$ mit $|r| < 2\sqrt{n}$ hat.

Lösung. Nach Definition haben wir

$$F_n(X, j(\tau)) = \prod_{M \in \Gamma \backslash M_n} (X - j(M\tau)).$$

Es gilt also $F_n(j(\tau), j(\tau)) = 0$ genau dann, wenn τ von einer Matrix $M \in M_n$ fixiert wird, d.h. wenn es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = n$ gibt so dass

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau.$$

Nehmen wir zunächst an, $\tau \in \mathbb{H}$ ist eine Nullstelle von $F_n(j(\tau), j(\tau))$, und $M \in M_n$ fixiert τ. Dann gilt

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0.$$

Da $\tau \in \mathbb{H}$ ist, muss $c \neq 0$ sein. Da auch $-M$ den Punkt τ fixiert, können wir annehmen, dass $c > 0$ ist. Der Punkt τ ist also der CM Punkt zur quadratischen Form $Q = [c, d-a, -b]$ der Diskriminante

$$(d-a)^2 - 4 \cdot (-c \cdot b) = d^2 - 2ad - a^2 + 4cb = d^2 + 2ad + a^2 - 4n = (a+d)^2 - 4n$$

Setze $r = a + d$. Da $\tau \in \mathbb{H}$ ist, muss $(a+d)^2 - 4n < 0$ sein, also $|r| = |a+d| \le 2\sqrt{n}$.

Ist umgekehrt τ ein CM Punkt zu einer positiv definiten quadratischen Form $Q = [A, B, C]$ der Determinante $r^2 - 4n$ mit $|r| < 2\sqrt{n}$ (also $A > 0$ und $r^2 - 4n < 0$), so ist

$$r^2 - 4n = B^2 - 4AC,$$

also

$$n = \frac{r^2 - B^2}{4} + AC.$$

Beachte, dass daraus $r \equiv B \pmod 2$ folgt. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{r-B}{2} & -C \\ A & \frac{r+B}{2} \end{pmatrix}$$

hat ganzzahlige Einträge und Determinante n, uns es gilt

$$M\tau = \frac{\frac{r-B}{2}\tau - C}{A\tau + \frac{r+B}{2}} = \tau \frac{\frac{r}{2}\tau - \frac{B}{2}\tau - C}{\frac{r}{2}\tau + A\tau^2 + \frac{B}{2}\tau} = \tau \frac{\frac{r}{2}\tau - \frac{B}{2}\tau - C}{\frac{r}{2}\tau + \underbrace{A\tau^2 + B\tau + C}_{=0} - \frac{B}{2}\tau - C} = \tau,$$

das heißt, τ wird von einer Matrix in M_n fixiert, und ist somit Nullstelle von $F_n(j(\tau), j(\tau))$.