

# **Vorlesung Modulformen**

**Universität zu Köln**

Dr. Markus Schwagenscheidt

Sommersemester 2019 - Stand: 4. Oktober 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Elliptische Kurven . . . . .	7
1.2	Überblick der Vorlesungsthemen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Modulformen zu <math>SL_2(\mathbb{Z})</math></b>	<b>13</b>
2.1	Die Modulgruppe und die obere Halbebene . . . . .	13
2.2	Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	18
2.3	Eisensteinreihen . . . . .	21
2.4	Ramanujans Delta-Funktion . . . . .	25
2.5	Die Gewichtsformel und die Struktur von $M_k$ . . . . .	26
2.6	Die $j$ -Invariante und modulare Funktionen . . . . .	32
2.7	Die Eisensteinreihe vom Gewicht 2 . . . . .	34
2.8	Die Dedekindsche Eta-Funktion . . . . .	37
2.9	Modulformen zu Kongruenzuntergruppen . . . . .	38
2.10	Die Jacobische Thetareihe und der Vier-Quadrate-Satz . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Hecke-Operatoren</b>	<b>47</b>
3.1	Das Petersson Skalarprodukt . . . . .	47
3.2	Poincaréreihen . . . . .	49
3.3	Hecke-Operatoren . . . . .	51
3.4	Die Algebra der Hecke-Operatoren . . . . .	55
3.5	Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren . . . . .	58
<b>4</b>	<b><math>L</math>-Funktionen</b>	<b>61</b>
4.1	Dirichletreihen . . . . .	61
4.2	Die $L$ -Funktion einer Modulform . . . . .	64
4.3	Die Rankin- $L$ -Reihe zweier Spitzenformen . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Die singulären Werte der <math>j</math>-Funktion</b>	<b>73</b>
5.1	Das modulare Polynom . . . . .	73
5.2	Die erzeugende Reihe der Spuren der singulären Werte . . . . .	76
5.2.1	Binäre quadratische Formen . . . . .	76
5.2.2	Die Modularität der Spuren von $J$ . . . . .	77
5.2.3	Eine Rekursion für $\text{tr}_J(d)$ . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>81</b>
6.1	Werkzeuge aus der Funktionentheorie . . . . .	81
6.1.1	Holomorphe Funktionen . . . . .	81
6.1.2	Meromorphe Funktionen . . . . .	82



# Vorwort

## Literatur

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die klassische Theorie der Modulformen zu  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Wir folgen in weiten Teilen dem Buch *Elliptische Funktionen und Modulformen* von Koecher und Krieg. Weitere geeignete Referenzen sind die Bücher

- Bruinier, van der Geer, Harder, Zagier - *The 1-2-3 of Modular Forms*,
- Diamond, Shurman - *A First Course in Modular Forms*,
- Iwaniec - *Topics in Classical Automorphic Forms*,
- Serre - *A Course in Arithmetic*.
- Zagier - *Introduction to modular forms*.

## Danksagung

Ich danke Tim Steinbach für hilfreiche Kommentare zum Layout sowie die Anfertigung vieler nützlicher Bilder für dieses Skript.

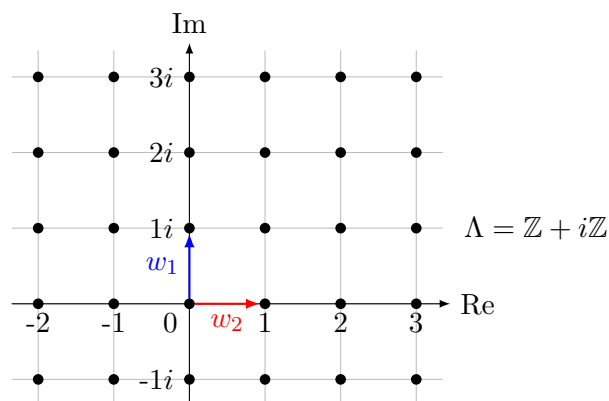


# 1 Einleitung

In diesem einführenden Kapitel wollen wir anhand eines klassischen Beispiels kurz motivieren, wie man auf natürliche Weise auf den Begriff der Modulform geführt wird. Anschließend geben wir einen kurzen Überblick über die Themen der Vorlesung.

## 1.1 Elliptische Kurven

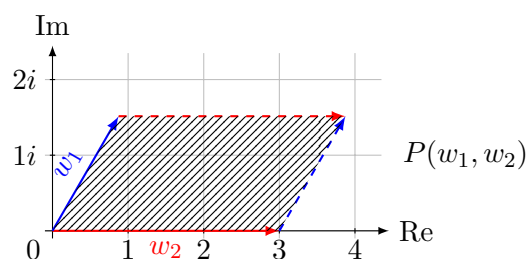
**Definition 1.1.1.** Eine Teilmenge  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  heißt *Gitter*, falls es linear unabhängige  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  gibt mit  $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ . In diesem Fall heißt  $\{w_1, w_2\}$  eine *Basis* von  $\Lambda$ .



Wir nehmen im Folgenden stets an, dass  $w_1, w_2$  so gewählt sind, dass  $\tau = \frac{w_1}{w_2}$  positiven Imaginärteil hat (andernfalls tauschen wir  $w_1$  und  $w_2$ ).

**Definition 1.1.2.** Sei  $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$  ein Gitter. Das *Periodenparallelogramm* (oder auch die *Grundmasche*) von  $\Lambda$  bzgl.  $w_1, w_2$  ist die Menge

$$P(w_1, w_2) = \{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 : 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1\}.$$



**Satz 1.1.3.** Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  gibt es genau ein  $w \in \Lambda$  mit  $z + w \in P(w_1, w_2)$ . Gehören  $z$  und  $z + w$  für ein  $w \in \Lambda$  zu  $P$ , so gilt  $w = 0$ .

*Beweis.* Schreibe  $z = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2$  und reduziere  $\xi_1, \xi_2$  modulo 1. □

## 1 Einleitung

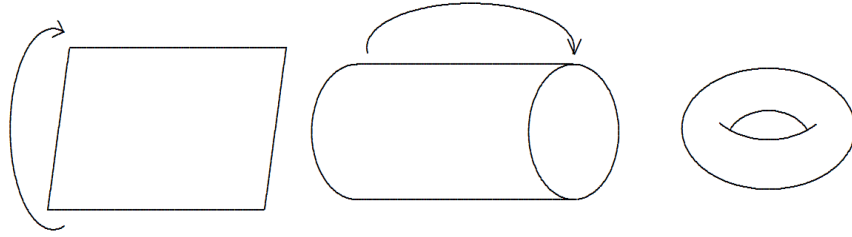


Abbildung 1.1: Der Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$

Wir betrachten nun die *Faktorgruppe*

$$\mathbb{C}/\Lambda = \{a + \Lambda : a \in \mathbb{C}\}.$$

Als Untergruppe der abelschen Gruppe  $(\mathbb{C}, +)$  ist  $\Lambda$  ein Normalteiler, so dass  $\mathbb{C}/\Lambda$  mittels

$$(a + \Lambda) + (b + \Lambda) = (a + b) + \Lambda$$

selbst zu einer abelschen Gruppe wird. Das Nullelement ist gegeben durch  $0 + \Lambda = \Lambda$ . Die *kanonische Projektion* ist definiert als

$$\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda, \quad \pi(a) = a + \Lambda.$$

Sie ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und nach dem letzten Lemma liefert die Einschränkung auf ein Periodenparallelogramm  $P$  eine Bijektion

$$\pi|_P : P \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\Lambda.$$

Identifiziert man die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms  $P$ , so kann man sich  $\mathbb{C}/\Lambda$  als *Torus* vorstellen. Man nennt  $\mathbb{C}/\Lambda$  auch eine *elliptische Kurve* über  $\mathbb{C}$ .

**Satz 1.1.4.** *Zwei elliptische Kurven  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  sind genau dann isomorph (als abelsche Gruppen), wenn  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$  für ein  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt.*

Ist also  $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$  ein Gitter, so ist die elliptische Kurve  $\mathbb{C}/\Lambda$  isomorph zu  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ , wobei  $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$  mit  $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ ,  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Bis auf Isomorphie können wir daher annehmen, dass jede elliptische Kurve von dieser Form ist. Es stellt sich dann die Frage, wann zwei elliptische Kurven der Form  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$  isomorph sind.

Die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  der invertierbaren ganzzahligen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1 operiert auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}$  durch Möbiustransformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

**Satz 1.1.5.** *Zwei elliptische Kurven  $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_1}$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_2}$  sind genau dann isomorph (als abelsche Gruppen), wenn es ein  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  gibt mit  $\tau_2 = M\tau_1$ .*



Wir haben daher eine 1-zu-1 Korrespondenz

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \iff \text{Isomorphieklassen elliptischer Kurven über } \mathbb{C}.$$

Wir werden später den Quotientenraum  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$  noch genauer untersuchen und sehen, dass er selbst wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

**Beispiel 1.1.6.** Für  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ , definieren wir die *Eisensteinreihe*

$$G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq w \in \Lambda} w^{-k} \in \mathbb{C}.$$

Wir werden später zeigen, dass sie für  $k \geq 3$  absolut konvergiert. Motiviert durch die Tatsache, dass jede elliptische Kurve isomorph ist zu  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$  für ein  $\tau \in \mathbb{H}$ , setzen wir nun

$$G_k(\tau) = G_k(\Lambda_\tau) = \sum_{0 \neq w \in \Lambda_\tau} w^{-k} = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} (m\tau + n)^{-k}$$

für  $\tau \in \mathbb{H}$ . Wie verhält sich  $G_k(\tau)$  nun, wenn man  $\tau$  durch  $M\tau$  für ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ersetzt, also  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$  durch eine isomorphe elliptische Kurve? Wir berechnen für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ :

$$G_k(M\tau) = \sum_{0 \neq w \in \mathbb{Z} \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + \mathbb{Z}} w^{-k} = (c\tau + d)^k \sum_{0 \neq w \in \mathbb{Z}(a\tau + b) + \mathbb{Z}(c\tau + d)} w^{-k} = (c\tau + d)^k G_k(\tau),$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\mathbb{Z}(a\tau + b) + \mathbb{Z}(c\tau + d) = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$  gilt, da  $M$  Determinante 1 hat. Wir werden später auch zeigen, dass  $G_k(\tau)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{H}$  ist. Man sagt,  $G_k(\tau)$  ist eine Modulform vom Gewicht  $k$ .

## 1.2 Überblick der Vorlesungsthemen

Wir gehen kurz die Themen durch, die in der Vorlesung behandelt werden.

### Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Eine *Modulform* vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$  zu  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , die das Transformationsverhalten

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für alle  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  besitzt, und die für  $\mathrm{Im}(\tau) \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Das Transformationsverhalten bedeutet (grob gesagt), dass  $f$  viele komplizierte Symmetrien besitzt. Dies kann man gut am Farbplot einer Modulform erkennen.

Eine zunächst überraschende Tatsache ist, dass die  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $M_k$  von Modulformen festen Gewichts  $k$  *endlich-dimensional* sind. Wir zeigen dies mithilfe der sogenannten *Gewichtsformel*, welche starke Einschränkungen für die Null- und Polstellenordnungen einer Modulform liefert.

Jede Modulform besitzt eine *Fourierentwicklung* der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n$$

## 1 Einleitung

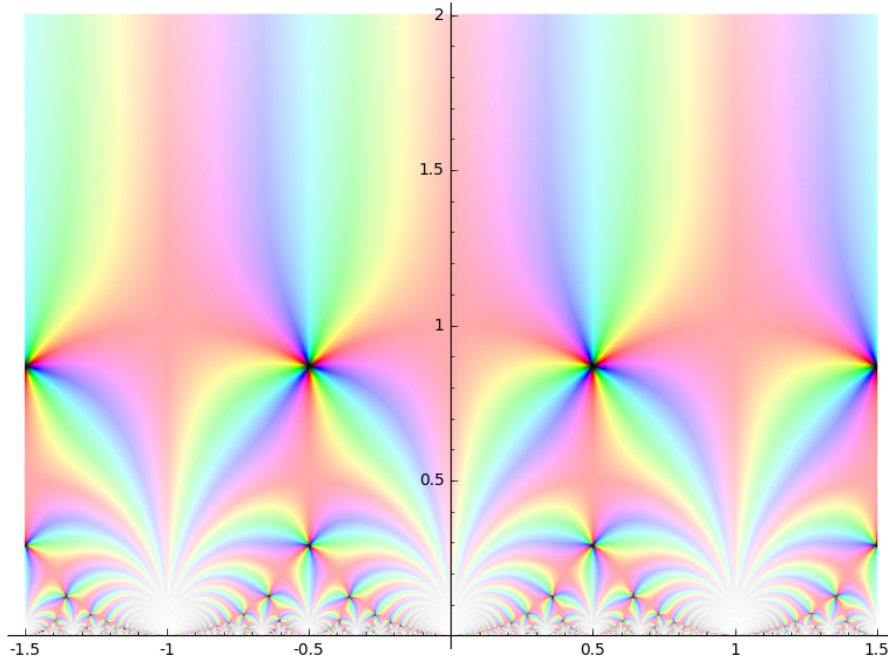


Abbildung 1.2: Die  $j$ -Funktion

mit der Abkürzung  $q = e^{2\pi i\tau}$  und Koeffizienten  $a_f(n) \in \mathbb{C}$ . Die Fourierkoeffizienten sind häufig interessante zahlentheoretische Funktionen (z.B. Darstellungsanzahlen quadratischer Formen wie im Beispiel der Jacobischen Thetafunktion). Unter Ausnutzung der Endlichdimensionalität von  $M_k$  kann man oft tiefliegende Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $a_f(n)$  beweisen.

Wir werden in der Vorlesung viele explizite Beispiele von Modulformen konstruieren, darunter *Eisenstein*-, *Poincaré*- und *Thetareihen*.

### Hecke-Operatoren

Für  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir den *Hecke-Operator*  $T_m$  durch seine Operation auf der Fourierreihe einer Modulform durch

$$T_m \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f(mn/d^2) \right) q^n.$$

Die Hecke-Operatoren definieren Endomorphismen auf  $M_k$ . Die  $T_m$  sind *multiplikativ*, d.h. es gilt  $T_{mn} = T_m T_n$  für  $(m, n) = 1$ .

Der Raum  $S_k \subset M_k$  aller Spitzenformen vom Gewicht  $k$  (das sind Modulformen, die für  $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$  nicht nur beschränkt sind, sondern sogar verschwinden) besitzt ein natürliches Skalarprodukt, das sogenannte *Petersson Skalarprodukt*. Wir werden sehen, dass die  $T_m$  miteinander kommutieren und bzgl. des Petersson Skalarprodukts selbstadjungiert sind. Aus einem bekannten Satz aus der linearen Algebra folgt, dass der Raum  $S_k$  eine Basis aus *simultanen Eigenformen aller  $T_m$*  besitzt, das heißt, dass

$$T_m f = \lambda_f(m) f$$

für jedes  $m$ , für ein geeignetes  $\lambda_f(m) \in \mathbb{C}$ , und jede Modulform  $f$  aus der Basis von  $S_k$ . Diese simultanen Eigenformen haben besonders schöne Eigenschaften. Normiert man sie mittels  $a_f(1) = 1$ , so sind ihre Fourierkoeffizienten multiplikativ, d.h. es gilt

$$a_f(mn) = a_f(m)a_f(n)$$

für  $(m, n) = 1$ .

### **L-Funktionen von Modulformen**

Man ordnet einer Modulform  $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n$  die *L-Funktion*

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{n^s} \tag{1.2.1}$$

zu. Sie konvergiert für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > k$  und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{C}$ , mit höchstens einem einfachen Pol bei  $s = k$ . Außerdem erfüllt die *vervollständigte L-Funktion*

$$\Lambda_f(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

die *Funktionalgleichung*

$$\Lambda_f(k-s) = i^k \Lambda_f(s).$$

Ist  $f \in S_k$  eine normierte Spitzenform und eine simultane Eigenform aller Hecke-Operatoren  $T_m$ , so besitzt die *L-Funktion* von  $f$  ein *Eulerprodukt*

$$L_f(s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_f(p)p^{-s} + p^{2k-1-2s}}$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen  $p$  läuft.

Wir werden sogenannte *Umkehrsätze* kennenlernen. Sie besagen, dass man aus der meromorphen Fortsetzung und der Funktionalgleichung einer *L-Funktion* wie in (1.2.1) (mit zunächst beliebigen  $a_f(n) \in \mathbb{C}$ ) schließen kann, dass die  $q$ -Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n$  eine Modulform vom Gewicht  $k$  ist.

Wir wollen außerdem kompliziertere *L-Funktionen*, wie die *Rankin L-Funktion*

$$L_{f,g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)\overline{a_g(n)}}{n^{s+k-1}}$$

zweier Modulformen  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n$  und  $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_g(n)q^n$ , untersuchen. Sie besitzt ebenfalls eine meromorphe Fortsetzung und erfüllt eine Funktionalgleichung, wie man mithilfe der *Rankin-Selberg-Methode* zeigen kann.



## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

### 2.1 Die Modulgruppe und die obere Halbebene

Die *Modulgruppe* ist die Gruppe

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \subset SL_2(\mathbb{R})$$

der  $2 \times 2$  Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1.

**Satz 2.1.1.** Die Modulgruppe  $\Gamma$  wird erzeugt von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Sei  $G$  die von  $T$  und  $S$  erzeugte Untergruppe von  $\Gamma$ . Beachte, dass  $-I = S^2 \in G$ . Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . Wir zeigen per Induktion nach  $|c|$ , dass  $M$  in  $G$  liegt. Ist  $|c| = 0$ , so muss  $M = \pm T^m$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$  gelten, also folgt  $M \in G$ . Ist  $|c| > 0$ , so betrachten wir die Matrix

$$ST^m M = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a + mc & b + md \end{pmatrix}$$

für  $m \in \mathbb{Z}$ . Wir können  $m$  so wählen, dass  $|a + mc| < |c|$  gilt. Nach Induktionsannahme gilt dann  $ST^m M \in G$ , woraus auch  $M \in G$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 2.1.2.** Es gelten die Relationen

$$S^2 = (TS)^3 = (ST)^3 = -I.$$

Die *obere Halbebene* ist die Menge

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}$$

aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil. Für eine Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  definieren wir die *Möbiustransformation*

$$M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Man nennt die Abbildungen der Form  $\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$  auch *Modulsubstitutionen* oder *gebrochen lineare Transformation*. Zum Beispiel operieren  $\pm I$  trivial, und  $T$  und  $S$  operieren als

$$T\tau = \tau + 1, \quad S\tau = -\frac{1}{\tau}.$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

**Lemma 2.1.3.** Die Gruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{H}$  durch Möbiustransformationen.

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass die Formel

$$\operatorname{Im}(M\tau) = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2} > 0$$

für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt, das heißt, es gilt auch  $M\tau \in \mathbb{H}$ . Weiter haben wir  $I\tau = \tau$ , und für  $M, N \in SL_2(\mathbb{R})$  überprüft man durch eine kurze Rechnung, dass  $M(N\tau) = (MN)\tau$  gilt. Damit definieren Möbiustransformationen eine Gruppenoperation von  $SL_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$ .  $\square$

**Bemerkung 2.1.4.** Die *Cayley-Transformation*

$$\tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

bildet die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  bijektiv auf den offenen Einheitskreis  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  ab. Die Operation der Gruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  durch Möbiustransformationen auf  $\mathbb{H}$  entspricht unter dieser Identifikation der natürlichen Operation der Gruppe  $\operatorname{Aut}(D)$  aller biholomorphen Abbildungen von  $D$ . Die Möbiustransformationen sind daher genau die biholomorphen Selbstabbildungen von  $\mathbb{H}$ .

**Bemerkung 2.1.5.** Die Menge aller Kreise und Geraden in  $\mathbb{H}$  geht unter Möbiustransformationen in sich selbst über.

**Bemerkung 2.1.6.** Die Gruppe  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$  operiert *treu* auf  $\mathbb{H}$ , das heißt, für jedes  $M \in \Gamma$  mit  $M \neq \pm I$  gibt es ein  $\tau \in \mathbb{H}$ , so dass  $M\tau \neq \tau$ .

**Bemerkung 2.1.7.** Man kann zeigen, dass  $\Gamma$  *eigentlich diskontinuierlich* auf  $\mathbb{H}$  operiert, das heißt, dass für jeden Punkt  $\tau \in \mathbb{H}$  eine Umgebung  $U$  existiert, so dass die Menge

$$\{M \in \Gamma : MU \cap U \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

**Bemerkung 2.1.8.** Die Gruppe  $SL_2(\mathbb{R})$  operiert transitiv auf  $\mathbb{H}$ . Daher schränken wir die Operation auf die diskrete Untergruppe  $\Gamma$  von  $SL_2(\mathbb{R})$  ein, um einen interessanten Quotienten  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  zu erhalten.

Wir geben eine gruppentheoretische Beschreibung der oberen Halbebene an. Es sei

$$SO(2) = \{K \in SL_2(\mathbb{R}) : M^t M = M M^t = I\}$$

die *orthogonale Gruppe* vom Rang 2 über  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 2.1.9.** Für  $K \in SL_2(\mathbb{R})$  sind äquivalent:

1.  $K \in SO(2)$ ,
2.  $Ki = i$ ,
3.  $K = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Übung. □

**Satz 2.1.10.** *Die Abbildung*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \rightarrow \mathbb{H}, \quad M \mapsto Mi$$

*ist bijektiv.*

*Beweis.* Da  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  transitiv auf  $\mathbb{H}$  operiert, ist die Abbildung  $M \mapsto Mi$  surjektiv. Da  $\mathrm{SO}(2)$  genau der Stabilisator von  $i$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist, folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 2.1.11.** Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist eine *Lie-Gruppe*, also eine topologische Gruppe, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, und  $\mathrm{SO}(2)$  ist eine kompakte Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist. Allgemeiner nennt man Quotienten der Form  $G/K$  mit einer Lie-Gruppe  $G$  und einer kompakten Untergruppe  $K \subset G$  einen *homogenen Raum*.

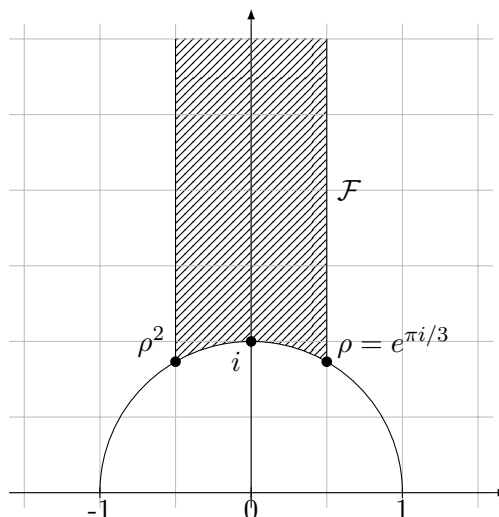
Als nächstes wollen wir den Quotienten  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  genauer untersuchen, und ein Repräsentantensystem für die Bahnen bestimmen. Dazu betrachten wir den *Fundamentbereich*

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1, -1/2 \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq 1/2\}$$

für  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ . Der Fundamentbereich enthält die drei Punkte

$$i, \quad \rho = e^{\pi i/3}, \quad \rho^2 = e^{2\pi i/3},$$

die eine besondere Rolle spielen.



**Satz 2.1.12.** *Der Fundamentbereich  $\mathcal{F}$  hat die folgenden Eigenschaften:*

1. *Zu jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  existiert ein  $M \in \Gamma$ , so dass  $M\tau \in \mathcal{F}$ .*
2. *Sind  $\tau \neq \tau' \in \mathcal{F}$  äquivalent modulo  $\Gamma$ , so liegen sie auf dem Rand von  $\mathcal{F}$ , und es gilt  $|\tau| = 1$  und  $\tau' = -1/\tau$  oder  $\mathrm{Re}(\tau) = \pm 1/2$  und  $\tau' = \tau \mp 1$ .*

## 2 Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

*Beweis. Zu 1.:* Sei  $\tau \in \mathbb{H}$ . Für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  gilt  $\mathrm{Im}(M\tau) = \mathrm{Im}(\tau)/|c\tau + d|^2$ . Man sieht anhand dieser Formel leicht, dass ein  $M_0 \in \Gamma$  existiert, so dass  $\mathrm{Im}(M_0\tau)$  maximal wird. Durch Multiplikation von  $M_0$  mit einer geeigneten Potenz von  $T$  können wir annehmen, dass  $|\mathrm{Re}(M_0\tau)| \leq 1/2$  gilt, ohne  $\mathrm{Im}(M_0\tau)$  zu verändern. Wir zeigen, dass dann  $|M_0\tau| \geq 1$  gilt. Würde nämlich umgekehrt  $|M_0\tau| < 1$  gelten, so wäre

$$\mathrm{Im}(SM_0\tau) = \frac{\mathrm{Im}(M_0\tau)}{|M_0\tau|^2} > \mathrm{Im}(M_0\tau),$$

im Widerspruch zur Maximalität von  $\mathrm{Im}(M_0\tau)$ . Damit folgt  $M_0\tau \in \mathcal{F}$ .

*Zu 2.:* Beachte zunächst, dass für jedes  $\tau = x + iy \in \mathcal{F}$  die Ungleichungen

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2.1.1)$$

gelten. Es seien nun  $\tau \neq \tau' \in \mathcal{F}$  und  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\tau = \tau'$ . Wir können annehmen, dass  $\mathrm{Im}(M\tau) \geq \mathrm{Im}(\tau)$  gilt (sonst tausche  $\tau$  und  $\tau'$ ), woraus

$$|c\tau + d|^2 \leq 1 \quad (2.1.2)$$

folgt. Wegen (2.1.1) haben wir

$$|c\tau + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \geq \frac{3}{4}c^2,$$

daher muss  $|c| \leq 1$  sein, also  $c \in \{-1, 0, 1\}$ . Da  $M$  und  $-M$  gleich operieren, können wir  $c \geq 0$  annehmen. Wir behandeln die Fälle  $c = 0$  und  $c = 1$  einzeln.

- $c = 0$ : In diesem Fall ist  $M = \pm T^m$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ , also  $\tau' = \tau + m$ . Daraus folgt leicht, dass  $\tau$  und  $\tau'$  auf den vertikalen Randstücken von  $\mathcal{F}$  liegen müssen, und  $m \in \{-1, 1\}$  gilt (der Fall  $m = 0$  kann wegen  $\tau \neq \tau'$  nicht auftreten). Insgesamt folgt  $\mathrm{Re}(\tau) = \pm 1/2$  und  $\tau' = \tau \mp 1$ .
- $c = 1$ : In diesem Fall folgt aus (2.1.1) und (2.1.2), dass

$$1 \geq |\tau + d|^2 = (x + d)^2 + y^2 = (x + d)^2 + \frac{3}{4}, \quad \Rightarrow \quad |x + d| \leq \frac{1}{2}, \quad (2.1.3)$$

so dass  $|d| \leq 1$  sein muss. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung:

- $d = 0$ : Dann ist  $M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^m S$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ , also  $M\tau = m - 1/\tau$ . Wäre  $|\tau| > 1$ , so würde aus

$$|\mathrm{Re}(-1/\tau)| = |x|/|\tau|^2 < 1/2$$

folgen, dass  $m = 0$  und  $|M\tau| = |-1/\tau| < 1$  gilt, im Widerspruch zu  $M\tau \in \mathcal{F}$ . Damit ist  $|\tau| = 1$ . Wegen  $M\tau = m - \bar{\tau} = (m - x) + iy$  sieht man, dass nur die drei Fälle

$$\begin{aligned} m = -1, & \quad \text{also} \quad M = T^{-1}S, \\ m = 0, & \quad \text{also} \quad M = S, \\ m = 1, & \quad \text{also} \quad M = TS, \end{aligned}$$

möglich sind. Für  $m = 0$  ist  $|\tau| = 1$  und  $\tau' = -1/\tau$  wie behauptet. Für  $m = 1$  macht man sich leicht klar, dass  $\tau = \tau' = \rho = e^{\pi i/3}$  gelten muss. Für  $m = -1$  sieht man analog, dass  $\tau = \tau' = \rho^2$  sein muss. Diese beiden Fälle sind aber wegen  $\tau \neq \tau'$  ausgeschlossen.



## 2.1 Die Modulgruppe und die obere Halbebene

–  $d = -1$  : Es folgt leicht auf (2.1.3), dass  $x = \frac{1}{2}$  und  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  sein muss, also  $\tau = \rho = e^{\pi i/3}$ . Aus  $\det(M) = 1$  folgt  $a + b = -1$  und somit

$$M\rho = \frac{a\rho + b}{\rho - 1} = a - \frac{1}{\rho - 1},$$

woraus  $\operatorname{Im}(M\rho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  und  $\operatorname{Re}(M\rho) = a + 1/2$  folgen. Dies ist nur möglich für  $a \in \{-1, 0\}$ . Für  $a = 0$  ist  $b = -1$ , also  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (TS)^2$ . Dann gilt  $M\rho = \rho$ . Dieser Fall ist aber wegen  $\tau \neq \tau'$  ausgeschlossen. Für  $a = -1$  ist  $b = 0$ , also  $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = STS$ . Dann ist  $M\rho = \rho^2$ . Beachte dass  $|\rho| = 1$  und  $M\rho = STS\rho = S\rho = -1/\rho$  wie gefordert.

–  $d = 1$ : Geht analog zum Fall  $d = -1$ . Jetzt muss  $\tau = \rho^2$  sein, und die einzigen Möglichkeiten für  $M$  sind  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST$  mit  $M\rho^2 = \rho^2$  (dieser Fall ist wieder ausgeschlossen) und  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -ST^{-1}S$  mit  $M\rho^2 = \rho$ .

□

**Bemerkung 2.1.13.** Man nennt allgemeiner eine Menge mit den Eigenschaften wie im Satz einen Fundamentalbereich, wenn sie zusätzlich gute topologische Eigenschaften hat. Der Begriff des Fundamentalbereichs ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Beachte, dass  $\mathcal{F}$  zusammenhängend und abgeschlossen ist, und einen stückweise glatten Rand hat.

**Bemerkung 2.1.14.** Die Menge  $\mathcal{F}$  ist kein Repräsentantensystem für  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ , da es Punkte auf dem Rand von  $\mathcal{F}$  gibt, die unter  $\Gamma$  äquivalent sind. Die Menge

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F} \setminus \left( \{\operatorname{Re}(\tau) = -1/2\} \cup \{|\tau| = 1, \operatorname{Re}(\tau) < 0\} \right)$$

ist ein Repräsentantensystem für  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ .

**Korollar 2.1.15.** Für  $\tau \in \mathcal{F}$  und  $M \in \Gamma$  gilt  $\operatorname{Im}(M\tau) \leq \operatorname{Im}(\tau)$ .

*Beweis.* Übung. □

Wir wollen nun die Fixpunkte der Operation von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  bestimmen. Dazu ist die folgende Klassifikation von Matrizen in  $\Gamma$  nach ihrer Spur  $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$  nützlich.

**Definition 2.1.16.** Eine Matrix  $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  heißt

1. *elliptisch*, falls  $|\operatorname{tr}(M)| < 2$ ,
2. *hyperbolisch*, falls  $|\operatorname{tr}(M)| > 2$ ,
3. *parabolisch*, falls  $|\operatorname{tr}(M)| = 2$ .

**Beispiel 2.1.17.** Die Matrizen  $\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für  $b \in \mathbb{R}$  sind parabolisch, die Matrizen  $S, ST, TS$  sind elliptisch, und die Diagonalmatrizen  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, 1$  sind hyperbolisch.

**Lemma 2.1.18.** Für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  setzen wir  $M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ , wobei wir  $\pm \frac{1}{0} = \infty$  setzen. Dann hat die Gleichung  $M\tau = \tau$  genau

## 2 Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

1. zwei Lösungen,  $\tau_1 \in \mathbb{H}$  und  $\tau_2 = \bar{\tau}_1 \in -\mathbb{H}$ , falls  $M$  elliptisch ist,
2. zwei Lösungen  $\tau_1 \neq \tau_2 \in \mathbb{R}$ , falls  $M$  hyperbolisch ist,
3. eine Lösung  $\tau \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , falls  $M$  parabolisch ist.

*Beweis.* Die Gleichung  $M\tau = \tau$  ist äquivalent zu  $c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$\tau = \frac{a-d \pm \sqrt{\mathrm{tr}(M)^2 - 4}}{2c}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir interessieren uns nun zunächst für Fixpunkte in der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  unter der Operation von  $\Gamma$ , also Fixpunkte elliptischer Matrizen in  $\Gamma$ . Für  $\tau \in \mathbb{H}$  sei

$$\Gamma_\tau = \{M \in \Gamma : M\tau = \tau\}$$

der Stabilisator von  $\tau$  in  $\Gamma$ . Beachte dass  $\pm 1 \in \Gamma_\tau$  für jeden Punkt  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt, und dass  $|\Gamma_\tau| = |\Gamma_{M\tau}|$  für  $M \in \Gamma$  gilt.

**Definition 2.1.19.** Ein Punkt  $\tau \in \mathbb{H}$  heißt *elliptischer Punkt* von  $\Gamma$  der Ordnung  $\frac{1}{2}|\Gamma_\tau|$ , falls  $\Gamma_\tau \neq \{\pm 1\}$ , das heißt, falls  $\tau$  nichttrivialen Stabilisator hat.

Wir zeigen, dass es nur zwei elliptische Punkte modulo der Operation von  $\Gamma$  gibt, deren Ordnungen 2 und 3 sind.

**Satz 2.1.20.** Die elliptischen Punkte von  $\Gamma$  im Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$  sind gegeben durch

1.  $\tau = i$ , mit Stabilisator  $\Gamma_i = \{\pm I, \pm S\}$ ,
2.  $\tau = \rho = e^{\pi i/3}$ , mit Stabilisator  $\Gamma_\rho = \{\pm I, \pm TS, \pm (TS)^2\}$ ,
3.  $\tau = \rho^2 = e^{2\pi i/3}$ , mit Stabilisator  $\Gamma_{\rho^2} = \{\pm I, \pm ST, \pm (ST)^2\}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt leicht aus dem Beweis von Punkt 2 aus Satz 2.1.12. □

## 2.2 Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  definieren wir den *Automorphiefaktor*

$$j(M, \tau) = c\tau + d.$$

Er erfüllt die sogenannte *Kozykel-Relation*

$$j(MN, \tau) = j(M, N\tau)j(N, \tau)$$

für  $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und  $\tau \in \mathbb{H}$ .

Es sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $M \in \Gamma$  und  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir den *Gewicht  $k$  Slash-Operator*

$$(f|_k M)(\tau) = j(M, \tau)^{-k} f(M\tau)$$

Mittels der Kozykel-Relation prüft man leicht nach, dass der Slash-Operator eine Wirkung von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der Menge der holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, das heißt, es gilt

$$f|_k MN = (f|_k M)|_k N$$

für  $M, N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

**Definition 2.2.1.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Modulform vom Gewicht  $k$  für  $\Gamma$* , falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $f$  ist holomorph auf  $\mathbb{H}$ ,
2.  $f|_k M = f$  für alle  $M \in \Gamma$ ,
3.  $f$  hat eine Fourierreiheentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n,$$

mit der Abkürzung  $q = e^{2\pi i \tau}$ .

Ist  $a_f(0) = 0$ , so heißt  $f$  eine *Spitzenform*. Den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Modulformen bezeichnen wir mit  $M_k$ , und den Unterraum aller Spitzenformen mit  $S_k$ .

**Bemerkung 2.2.2.** 1. Die zweite Bedingung aus Definition 2.2.1 besagt, dass

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für alle  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt. Für  $T$  und  $S$  erhält man

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau).$$

Da  $\Gamma$  von  $T$  und  $S$  erzeugt wird, sind diese beiden Funktionalgleichungen sogar äquivalent zu Bedingung 2.

2. Ist  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und invariant unter der Slash-Operation von  $T$ , so gilt

$$f(\tau + 1) = f(\tau),$$

das heißt,  $f$  ist 1-periodisch. Jede holomorphe 1-periodische Funktion besitzt eine Fourierreiheentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_f(n) q^n$$

mit Koeffizienten  $a_f(n) \in \mathbb{C}$  und  $q = e^{2\pi i \tau}$ . Die dritte Bedingung in Definition 2.2.1 besagt, dass die Fourierreiheentwicklung einer Modulform bei  $n = 0$  beginnt, also keine Terme von negativem Index hat. Äquivalent dazu ist, dass  $f(x + iy)$  beschränkt bleibt für  $y \rightarrow \infty$  (gleichmäßig in  $x$ ). Man sagt, dass  $f$  *holomorph bei  $\infty$*  ist. Ist  $f$  sogar eine Spitzenform, so geht  $f(x + iy)$  exponentiell schnell gegen 0 für  $y \rightarrow \infty$  (gleichmäßig in  $x$ ), und man sagt, dass  $f$  *bei  $\infty$  verschwindet*.

3. Die Koeffizienten  $a_f(n)$  sind gegeben durch das Integral

$$a_f(n) = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n(x + iy)} dx,$$

wobei  $y > 0$  beliebig gewählt werden kann. Außerdem gilt

$$a_f(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(iy).$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

**Lemma 2.2.3.** *Sind  $f \in M_k$  und  $g \in M_\ell$ , so ist  $fg \in M_{k+\ell}$ . Ist  $f$  oder  $g$  eine Spitzenform, so ist auch  $fg$  eine Spitzenform.*

*Beweis.* We berechnen für  $M \in \Gamma$ , dass

$$(fg)|_{k+\ell}M = j(M, \tau)^{-k-\ell}(fg)(M\tau) = j(M, \tau)^{-k}f(M\tau)j(M, \tau)^{-\ell}g(M\tau) = f|_kM \cdot g|_\ell M.$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Aussage folgt sofort durch Multiplizieren der Fourierreihenentwicklungen von  $f$  und  $g$ .  $\square$

**Lemma 2.2.4.** *Ist  $k \in \mathbb{Z}$  ungerade, so gilt  $M_k = \{0\}$ , das heißt, jede Modulform ungeraden Gewichts verschwindet identisch.*

*Beweis.* Sei  $f \in M_k$ . Das Transformationsverhalten von  $f$  unter der negativen Einheitsmatrix  $-I$  liefert

$$f(\tau) = f((-I)\tau) = (-1)^k f(\tau)$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Daraus folgt  $f \equiv 0$  falls  $k$  ungerade ist.  $\square$

Wir zeigen nun, dass die Koeffizienten von Spitzenformen höchstens polynomiell wachsen.

**Satz 2.2.5** (Hecke bound). *Ist  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)q^n \in S_k$  eine Spitzenform, so gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit*

$$|a_f(n)| \leq Cn^{k/2}$$

für alle  $n \geq 1$ .

*Beweis.* Ist  $f \in S_k$ , so ist die Funktion  $h(\tau) = \text{Im}(\tau)^{k/2}|f(\tau)|$  invariant unter  $\Gamma$ , das heißt, es gilt  $h(M\tau) = h(\tau)$  für alle  $M \in \Gamma$  und  $\tau \in \mathbb{H}$ . Da  $f(\tau)$  für  $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$  verschwindet, ist  $h(\tau)$  auf dem Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$  beschränkt. Wegen der  $\Gamma$ -Invarianz ist  $h(\tau)$  auf ganz  $\mathbb{H}$  beschränkt, das heißt, es gibt eine Konstante  $C' > 0$  mit  $h(\tau) \leq C'$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Wir können den  $n$ -ten Fourierkoeffizienten  $a_f(n)$  von  $f$  daher abschätzen durch

$$|a_f(n)| \leq \int_0^1 |f(x+iy)|e^{2\pi ny} dx = \int_0^1 y^{-k/2} h(x+iy) e^{2\pi ny} dx \leq C' y^{-k/2} e^{2\pi ny},$$

wobei wir  $y > 0$  beliebig wählen können. Mit  $y = \frac{1}{n}$  folgt

$$|a_f(n)| \leq C' e^{2\pi} n^{k/2},$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Bemerkung 2.2.6.** Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass für Modulformen  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in M_k$  im Allgemeinen die schwächere Abschätzung  $a_f(n) \leq Cn^{k-1}$  gilt.

Mit einer ähnlichen Beweisidee erhalten wir ein erstes Strukturresultat über die Räume  $M_k$  der Modulformen festen Gewichts.

**Satz 2.2.7.** *Für  $k < 0$  gilt  $M_k = \{0\}$ .*

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.2.5 betrachten wir für  $f \in M_k$  die  $\Gamma$ -invariante Funktion  $h(\tau) = \text{Im}(\tau)^{k/2}|f(\tau)|$ . Sie ist auf dem Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$  beschränkt, und da sie  $\Gamma$ -invariant ist und  $k < 0$  ist, ist  $h(\tau)$  auf ganz  $\mathbb{H}$  beschränkt, d.h. es gilt  $h(\tau) \leq C'$  für ein  $C' > 0$  und alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Wir erhalten für  $n \geq 0$  die Abschätzung

$$|a_f(n)| \leq \int_0^1 |f(x+iy)|e^{2\pi ny} dx = \int_0^1 y^{-k/2} h(x+iy) e^{2\pi ny} dx \leq C' y^{-k/2} e^{2\pi ny},$$

wobei wir  $y > 0$  beliebig wählen können. Insbesondere können wir wegen  $k < 0$  den Grenzwert  $y \rightarrow 0$  auf der rechten Seite bilden und erhalten  $a_f(n) = 0$  für alle  $n \geq 0$ , also  $f = 0$ .  $\square$

## 2.3 Eisensteinreihen

Als erste Beispiele nicht-trivialer Modulformen betrachten wir Eisensteinreihen.

**Lemma 2.3.1.** *Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  konvergiert die Eisensteinreihe*

$$G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m\tau + n)^{-k}$$

*absolut und lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{H}$ , und definiert daher eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$ .*

*Beweis.* Es sei  $K \subset \mathbb{H}$  eine kompakte Teilmenge. Man kann zeigen, dass es (von  $K$  abhängige) Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  gibt, so dass

$$\alpha |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \beta |mi + n|$$

für alle  $\tau \in K$  gilt. Dies wollen wir hier ohne Beweis benutzen. Wir können dann für  $\tau \in K$  abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |m\tau + n|^{-k} &\leq \alpha^{-k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |mi + n|^{-k} \\ &= \alpha^{-k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m^2 + n^2)^{-k/2}. \end{aligned}$$

Wir teilen die Summe auf und schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m^2 + n^2)^{-k/2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n^{-k} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} m^{-k} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (m^2 + n^2)^{-k/2} \\ &\leq 4\zeta(k) + \sum_{m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2|mn|)^{-k/2} \\ &= 4\zeta(k) + 4 \cdot 2^{-k/2} \zeta(k/2)^2, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $m^2 + n^2 \geq 2|mn|$  für alle  $m, n \in \mathbb{R}$  gilt. Für  $k \geq 4$  konvergieren  $\zeta(k)$  und  $\zeta(k/2)$ , so dass also die Summe  $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |m\tau + n|^{-k}$  ebenfalls konvergiert, das heißt,  $G_k$  konvergiert absolut. Da die Abschätzung am Ende nur vom gewählten Kompaktum  $K$ , aber nicht mehr von  $\tau$  abhängt, ist die Konvergenz gleichmäßig auf  $K$ , das heißt,  $G_k$  konvergiert lokal gleichmäßig. Da die Summanden  $(m\tau + n)^{-k}$  auf  $\mathbb{H}$  holomorph sind, ist dann nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz auch  $G_k$  auf  $\mathbb{H}$  holomorph, und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung 2.3.2.** Für ungerade  $k$  heben sich die Terme  $(c\tau + d)^{-k}$  und  $(-c\tau - d)^{-k}$  in der Summe gegenseitig weg, so dass in diesem Fall  $G_k \equiv 0$  gilt.

**Lemma 2.3.3.** *Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  besitzt die Eisensteinreihe  $G_k$  das Transformationsverhalten*

$$G_k|_k M = G_k$$

*für alle  $M \in \Gamma$ .*

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

*Beweis.* Wir setzen  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  ein und berechnen

$$\begin{aligned} G_k|_k M &= (c\tau + d)^{-k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left( m \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + n \right)^{-k} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m(a\tau + b) + n(c\tau + d))^{-k} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} ((ma + nc)\tau + mb + nd)^{-k} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m\tau + n)^{-k} = G. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass die Abbildung  $(m, n) \mapsto (ma + nc, mb + nd)$  wegen  $\det(M) = 1$  eine Bijektion von  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ist, und dass wir die Reihen wegen der absoluten Konvergenz umordnen dürfen.  $\square$

**Lemma 2.3.4.** Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  besitzt die Eisensteinreihe  $G_k$  die Fourierentwicklung

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

wobei  $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$  die Riemannsche Zetafunktion und  $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$  die verallgemeinerte Teilersummenfunktion ist.

*Beweis.* Wir spalten zunächst die Terme mit  $m = 0$  ab und schreiben

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum_{n \neq 0} n^{-k} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} \\ &= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die innere Summe für festes  $m$ , und ersetzen  $m\tau$  für den Moment durch  $\tau$ . Als Funktion von  $\tau$  ist die so entstehende Reihe 1-periodisch und holomorph und hat daher eine Fourierentwicklung

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} e^{-2\pi i d \tau} dx \right) e^{2\pi i d \tau},$$

wobei das innere Integral nicht von der Wahl von  $y > 0$  abhängt. Durch Vertauschen von Summe und Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} e^{-2\pi i d \tau} dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 (\tau + n)^{-k} e^{-2\pi i d \tau} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-k} e^{-2\pi i d \tau} dx. \end{aligned}$$

Für  $d \leq 0$  verschwindet das letzte Integral, da es in diesem Fall für  $y \rightarrow \infty$  verschwindet, andererseits aber auch von  $y$  unabhängig ist. Für  $d > 0$  ist das Integral gegeben durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-k} e^{-2\pi i d \tau} dx = d^{k-1} \frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)}$$

wobei wir eine bekannte Integraldarstellung von  $\frac{1}{\Gamma(k)}$  verwendet haben, mit der Gamma-Funktion  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-ts} t^{s-1} dt$  für  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Beachte dass  $\Gamma(k) = (k-1)!$  für  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ . Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d \tau}. \quad (2.3.1)$$

Diese Formel heißt auch *Lipschitz-Formel*. Setzen wir dies in die Reihendarstellung von  $G_k$  ein (mit  $m\tau$  statt  $\tau$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d m \tau} \\ &= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} e^{2\pi i n \tau}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt  $n = md$  gesetzt haben. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

**Satz 2.3.5.** Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  ist  $G_k \in M_k$  eine nicht-triviale Modulform vom Gewicht  $k$ , aber keine Spitzenform.

*Beweis.* Aus den vorangegangenen Lemmas folgt, dass  $G_k$  für  $k \geq 4$  holomorph auf  $\mathbb{H}$  ist, mit Gewicht  $k$  unter  $\Gamma$  transformiert, und eine Fourierentwicklung besitzt, die keine Terme von negativem Index hat, also holomorph bei  $\infty$  ist. Damit ist  $G_k \in M_k$  eine Modulform vom Gewicht  $k$ . Da der konstante Term von  $G_k$  gleich  $2\zeta(k) \neq 0$  ist, ist  $G_k \neq 0$  und  $G_k$  ist keine Spitzenform.  $\square$

**Definition 2.3.6.** Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  definieren wir die *normierte Eisensteinreihe*

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

**Bemerkung 2.3.7.** Die normierte Eisensteinreihe hat die Darstellung

$$E_k = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k M,$$

mit der Untergruppe  $\Gamma_\infty = \{\pm T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ .

Man kann jede Modulform eindeutig zerlegen als Summe eines Vielfachen der Eisensteinreihe  $E_k$  und einer Spitzenform.

**Lemma 2.3.8.** Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  gilt  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ .

*Beweis.* Ist  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n \in M_k$ , so ist  $f - a_f(0)E_k \in S_k$ . Da jedes Vielfache von  $E_k$  einen nicht-verschwindenden konstanten Term hat, ist klar, dass  $\mathbb{C}E_k \cap S_k = \{0\}$  gilt.  $\square$

Damit können wir eine Abschätzung des Wachstums der Fourierkoeffizienten aller Modulformen in  $M_k$  beweisen.

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

**Satz 2.3.9.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  gerade mit  $k \geq 4$  und  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in M_k$ . Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so dass  $a_f(n) \leq Cn^{k-1}$  für alle  $n \geq 1$  gilt.

*Beweis.* Wir zerlegen  $f = \alpha E_k + g$  mit einer Konstante  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $g \in S_k$ . Die Abschätzung der Koeffizienten von  $g$  folgt aus Satz 2.2.5. Zur Abschätzung des Wachstums der Koeffizienten von  $E_k$  genügt es, die verallgemeinerten Teilersummen  $\sigma_{k-1}(n)$  abzuschätzen. Dazu schreiben wir

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1} = \sum_{d|n} (n/d)^{k-1} < n^{k-1} \sum_{d=1}^{\infty} d^{1-k} = n^{k-1} \zeta(k-1).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Wir wollen noch zeigen, dass die normierte Eisensteinreihe  $E_k$  rationale Fourierkoeffizienten besitzt. Dazu benötigen wir Informationen über die Werte  $\zeta(k)$  bei geraden natürlichen Zahlen  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 4$ . Sie lassen sich in Termen von Bernoulli-Zahlen schreiben.

**Definition 2.3.10.** Die *Bernoulli-Zahlen*  $B_n$  sind definiert durch

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

also als die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von  $\frac{x}{e^x-1}$  um  $x = 0$ .

Man kann zeigen, dass die  $B_n$  allesamt rationale Zahlen sind. Außerdem gilt  $B_n = 0$  für alle ungeraden  $n \geq 3$ . Die ersten paar Werte von  $B_n$  sind gegeben durch

$n$	0	1	2	4	6	8	10	12
$B_n$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

Die *Eulersche Formel* besagt nun:

**Satz 2.3.11.** Für gerade  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$  gilt

$$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k.$$

*Beweis.* Zum Beweis verwenden wir die *Partialbruchzerlegung des Kotangens*: Für  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  gilt

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right). \quad (2.3.2)$$

Setzt man  $y = \pi x$ , so erhält man nach einer kurzen Rechnung unter Benutzung der geometrischen Reihe

$$y \cot(y) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} y^{2k}.$$

Benutzt man andererseits die Darstellung  $\cot(y) = i \frac{e^{2iy}+1}{e^{2iy}-1}$ , so erhält man

$$y \cot(y) = \frac{2iy}{2} + \frac{2iy}{e^{2iy}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!}.$$

Durch Vergleichen der Taylorkoeffizienten der beiden Darstellungen von  $y \cot(y)$  folgt die behauptete Formel.  $\square$



**Bemerkung 2.3.12.** Für ungerade  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 3$  ist nur sehr wenig über die Werte  $\zeta(k)$  bekannt. Apéry konnte 1979 beweisen, dass  $\zeta(3)$  irrational ist, und Zudilin hat 2001 gezeigt, dass mindestens einer der Werte  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  irrational ist.

Damit erhalten wir eine rationale Formel für die Fourierkoeffizienten der normierten Eisensteinreihe  $E_k$ .

**Satz 2.3.13.** Für gerade  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \geq 4$  besitzt  $E_k$  die Fourierentwicklung

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n.$$

Insbesondere sind die Fourierkoeffizienten von  $E_k$  rationale Zahlen.

**Beispiel 2.3.14.** Für  $k = 4$  und  $k = 6$  haben wir die Fourierentwicklungen

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + 30240q^5 \dots$$

$$E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 - 1575504q^5 - \dots$$

Die Fourierkoeffizienten von  $E_k$  haben offenbar sogar beschränkte Nenner, das heißt, es gibt eine Konstante  $C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (nämlich den Zähler von  $B_k$ ) so dass  $C \cdot E_k$  ganzzahlige Fourierkoeffizienten hat. Die bemerkenswerte Tatsache, dass Modulformen mit rationalen bzw. sogar ganzzahligen Fourierkoeffizienten existieren, folgt nicht auf offensichtliche Weise aus der Definition einer Modulform, und ist einer der Gründe, warum Modulformen in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen.

## 2.4 Ramanujans Delta-Funktion

Wir wollen nun ein erstes Beispiel einer nicht-trivialen Spitzenform konstruieren.

**Definition 2.4.1.** Ramanujans Delta-Funktion ist definiert als

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}.$$

Die Koeffizienten  $\tau(n)$  der Fourierentwicklung

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + 84480q^8 + \dots$$

heißen Ramanujans  $\tau$ -Funktion.

**Satz 2.4.2.** Es ist  $\Delta \in S_{12}$  eine nicht-triviale Spitzenform vom Gewicht 12.

*Beweis.* Durch Multiplikation der Fourierentwicklungen sieht man, dass  $E_4^3$  und  $E_6^2$  beides Modulformen vom Gewicht 12 sind, die konstanten Term 1 haben. Daher ist  $E_4^3 - E_6^2 \in S_{12}$ . Der Faktor 1728 normiert  $\Delta$  so, dass die Fourierentwicklung mit  $q$  beginnt. Insbesondere ist  $\Delta$  nicht die Nullfunktion.  $\square$

**Bemerkung 2.4.3.** Die Delta-Funktion hat die Produktentwicklung

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Wir kommen später auf den Beweis dieser Tatsache zurück. Man sieht an der Produktentwicklung, dass die  $\tau(n)$  ganze Zahlen sind. Es folgt außerdem, dass  $\Delta$  keine Nullstellen in  $\mathbb{H}$  hat. Dies werden wir im nächsten Abschnitt mithilfe der Gewichtformel beweisen.

**Bemerkung 2.4.4.** Die Koeffizienten  $\tau(n)$  der Delta-Funktion haben viele interessante Eigenschaften (manche bis heute unbewiesen). Hier nur einige Beispiele:

1. Die Koeffizienten  $\tau(n)$  sind *multiplikativ*, das heißt, es gilt

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

für alle  $(m, n) = 1$ . Zum Beispiel gilt

$$\tau(6) = -6048 = -24 \cdot 252 = \tau(2) \cdot \tau(3).$$

Wir werden dies mithilfe von Hecke-Operatoren beweisen.

2. Die  $\tau(n)$  erfüllen viele Kongruenzen, zum Beispiel

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dies werden wir in den Übungen zeigen.

3. *Ramanujan-Vermutung.* Für alle Primzahlen  $p$  gilt

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}.$$

Die Vermutung wurde 1974 von Deligne in größerer Allgemeinheit bewiesen.

4. *Lehmer-Vermutung.* Es gilt  $\tau(n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Vermutung ist bis heute offen.

## 2.5 Die Gewichtformel und die Struktur von $M_k$

Es sei  $f \in M_k$  eine Modulform vom Gewicht  $k$ . Als holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$  besitzt sie in jedem Punkt  $a \in \mathbb{H}$  eine Taylorentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{f,a}(n)(\tau - a)^n$$

mit Koeffizienten  $c_{f,a}(n) \in \mathbb{C}$ . Wir definieren die *Ordnung von  $f$  in  $a$*  durch

$$\text{ord}_a(f) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : c_{f,a}(n) \neq 0\}.$$

Eine Modulform hat außerdem eine Fourierreentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n,$$

und wir definieren die *Ordnung von  $f$  in  $\infty$*  durch

$$\text{ord}_\infty(f) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_f(n) \neq 0\}.$$

Die Gewichtformel gibt eine Formel für die Summe der Ordnungen einer Modulform.

## 2.5 Die Gewichtsformel und die Struktur von $M_k$

**Satz 2.5.1** (Gewichtsformel). Für  $f \in M_k$  mit  $f \neq 0$  gilt die Formel

$$\text{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2} \text{ord}_i(f) + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho(f) + \sum_{\substack{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H} \\ \tau \neq i, \rho \pmod{\Gamma}}} \text{ord}_\tau(f) = \frac{k}{12}.$$

**Bemerkung 2.5.2.**

1. Für  $f \in M_k$  gilt die Formel

$$\text{ord}_{M\tau}(f) = \text{ord}_\tau(f)$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $M \in \Gamma$ , das heißt, die Ordnung von  $f$  in  $\tau$  hängt nur von der Klasse von  $\tau$  in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  ab. Damit ist die Summe auf der linken Seite der Gewichtsformel wohldefiniert.

2. Die Formel heißt auch *k/12-Formel*, und auf englisch *valence formula*. Definiert man  $\text{ord}(\infty) = 1$  und die Ordnung eines Punktes  $\tau \in \mathbb{H}$  als

$$\text{ord}(\tau) = \frac{1}{2} |\Gamma_\tau| = \begin{cases} 3, & \text{falls } \tau = \rho \pmod{\Gamma}, \\ 2, & \text{falls } \tau = i \pmod{\Gamma}, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so kann man die Gewichtsformel etwas kompakter schreiben als

$$\sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H} \cup \{\infty\}} \frac{\text{ord}_\tau(f)}{\text{ord}(\tau)} = \frac{k}{12}.$$

3. Die Summe auf der linken Seite der Gewichtsformel ist endlich, da sich die Nullstellen von  $0 \neq f \in M_k$  in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  nicht häufen.

**Beispiel 2.5.3.** Aus der Gewichtsformel folgt, dass die Eisensteinreihe  $E_4$  (bzw.  $E_6$ ) eine einfache Nullstelle bei  $\tau = \rho$  (bzw.  $\tau = i$ ) hat, und keine weiteren Nullstellen modulo  $\Gamma$ .

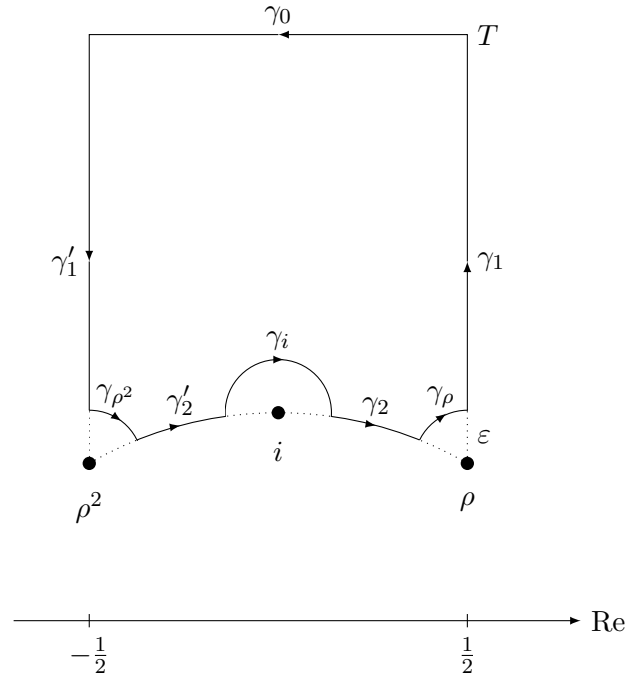
Wir kommen nun zum Beweis der Gewichtsformel.

*Beweis von Satz 2.5.1.* Es sei

$$f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_f(n) q^n \in M_k$$

mit  $f \neq 0$  und  $a_f(n_0) \neq 0$ . Insbesondere gilt  $n_0 = \text{ord}_\infty(f)$ . Es existiert ein  $T > 0$ , so dass  $f(\tau)$  für  $\text{Im}(\tau) > T$  keine Nullstellen hat. Denn andernfalls würden sich die Nullstellen der Funktion  $g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n$  (die für  $|q| < 1$  holomorph ist) bei  $q = 0$  häufen, was nach dem Identitätssatz schon  $g(q) = 0$  für alle  $|q| < 1$  implizieren würde, im Widerspruch zu  $f \neq 0$ . Wir nehmen der Einfachheit halber zunächst an, dass  $f$  auch keine Nullstellen auf dem Rand des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}$  hat. Wir betrachten nun folgenden Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{H}$ :

2 Modulformen zu  $SL_2(\mathbb{Z})$



Dabei ist  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt, dass die Kreise um  $i, \rho$  und  $\rho^2$  keine Nullstellen im Inneren von  $\mathcal{F}$  enthalten.

Nach dem Residuensatz gilt mit  $F = f'/f$  die Formel

$$\int_{\gamma} F(\tau) d\tau = 2\pi i \sum_{w \in \mathcal{F}^\circ} \text{ord}_w(f), \quad (2.5.1)$$

wobei  $\mathcal{F}^\circ$  das Innere von  $\mathcal{F}$  bezeichnet. Da die rechte Seite nicht von  $\varepsilon$  abhängt, können wir auf der linken Seite den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  nehmen. Wir berechnen die Integrale über die einzelnen Teilwege:

- Der Weg  $\gamma_0$ : Die Funktion  $F = f'/f$  ist 1-periodisch und besitzt eine Fourierreiheentwicklung der Form

$$F(\tau) = \frac{2\pi i \sum_{n=n_0}^{\infty} n a_f(n) q^n}{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_f(n) q^n} = 2\pi i n_0 + \dots$$

besitzt. Wir parametrisieren  $-\gamma_0$  (wobei das Minus die Umkehrung der Orientierung angibt) durch  $x \mapsto x + iT$  mit  $x \in [-1/2, 1/2]$ . Es gilt

$$\int_{\gamma_0} F(\tau) d\tau = - \int_{-1/2}^{1/2} F(x + iT) dx = -2\pi i n_0 = -2\pi i \text{ord}_{\infty}(f).$$

- Die Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma'_1$ : Da  $F$  1-periodisch ist, und  $\gamma'_1$  umgekehrt zu  $\gamma_1$  orientiert ist, folgt

$$\int_{\gamma_1} F(\tau) d\tau + \int_{\gamma'_1} F(\tau) d\tau = 0.$$

## 2.5 Die Gewichtsformel und die Struktur von $M_k$

- Die Wege  $\gamma_2$  und  $\gamma'_2$ : Beachte, dass die Funktion  $F = f'/f$  für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  das Transformationsverhalten

$$F(M\tau)dM\tau = \left( \frac{kc}{c\tau + d} + F(\tau) \right) d\tau$$

besitzt. Die Matrix  $S$  bildet  $\gamma_2$  auf  $-\gamma'_2$  ab. Wir erhalten daher

$$\int_{\gamma'_2} F(\tau)d\tau = - \int_{S\gamma_2} F(\tau)d\tau = - \int_{\gamma_2} F(S\tau)dS\tau = - \int_{\gamma_2} \left( \frac{k}{\tau} + F(\tau) \right) d\tau,$$

und somit

$$\int_{\gamma_2} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma'_2} F(\tau)d\tau = -k \int_{\gamma_2} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Wir berechnen weiter

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\gamma_2} \frac{d\tau}{\tau} \right) = \int_i^\rho \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{2\pi i}{12}.$$

Die Rechnung für den letzten Schritt lassen wir als Übungsaufgabe.

- Die Wege  $\gamma_\rho, \gamma_{\rho^2}$  und  $\gamma_i$ : Die Funktion  $F(\tau)$  hat um  $\rho$  eine Laurent-Entwicklung der Form

$$F(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_F(n)(\tau - \rho)^n.$$

Dabei ist  $c_F(-1) = \text{ord}_\rho(f)$ , wie man sich leicht durch Einsetzen der Taylorentwicklung von  $f$  in  $F = f'/f$  klar macht.

Wir schreiben

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} F(\tau)d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( c_F(-1) \int_{\gamma_\rho} \frac{d\tau}{\tau - \rho} + \int_{\gamma_\rho} \left( F(\tau) - \frac{c_F(-1)}{\tau - \rho} \right) d\tau \right).$$

Das zweite Integral verschwindet für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da der Integrand bei  $\tau = \rho$  holomorph ist und die Länge des Integrationsweges gegen 0 geht. Mit  $c_F(-1) = \text{ord}_\rho(f)$  erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} F(\tau)d\tau = \text{ord}_\rho(f) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\tau}{\tau - \rho}.$$

Um das Integral zu berechnen, wählen wir  $\alpha = \alpha(\varepsilon)$  so, dass  $e^{i\alpha}$  auf dem Einheitskreis links von  $\rho$  liegt und  $|e^{i\alpha} - \rho| = \varepsilon$ . Es sei  $\varphi = \varphi(\varepsilon) < 0$  der Winkel zwischen  $\rho + i\varepsilon$  und  $e^{i\alpha}$ .

Dann können wir den Weg  $\gamma_\rho$  parametrisieren durch

$$\rho + \varepsilon e^{it}, \quad \frac{\pi}{2} + \varphi \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Damit können wir weiter rechnen:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\tau}{\tau - \rho} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi/2+\varphi}^{\pi/2} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi i}{3}.$$

Insgesamt folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} F(\tau)d\tau = -\frac{2\pi i}{6} \text{ord}_\rho(f).$$

2 Modulformen zu  $SL_2(\mathbb{Z})$

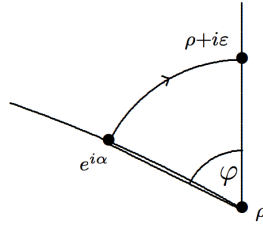


Abbildung 2.1: Der Weg  $\gamma_\rho$

Analog zeigt man

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho^2}} F(\tau) d\tau = -\frac{2\pi i}{6} \text{ord}_\rho(f).$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_i} F(\tau) d\tau = -\frac{2\pi i}{2} \text{ord}_i(f).$$

Nehmen wir alle Wege zusammen, so erhalten wir aus (2.5.1) die Gewichtsformel. Liegen Nullstellen auf dem Rand von  $\mathcal{F}$ , so schneidet man (wie bei  $i, \rho$  und  $\rho^2$ ) kleine Kreise um die Nullstellen aus. Die zusätzlichen Randintegrale behandelt man ähnlich wie oben.  $\square$

**Lemma 2.5.4.** Die  $\Delta$ -Funktion hat keine Nullstellen auf  $\mathbb{H}$ . Insbesondere ist die Abbildung

$$M_k \rightarrow S_{k+12}, \quad f \mapsto \Delta \cdot f$$

ein Isomorphismus.

*Beweis.* Für  $k = 12$  ist die rechte Seite der Gewichtsformel gleich 1. Weiter ist  $\text{ord}_\infty(\Delta) = 1$ . Da  $\text{ord}_\tau(\Delta) \geq 0$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt, muss nach der Gewichtsformel sogar  $\text{ord}_\tau(\Delta) = 0$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  gelten, also hat  $\Delta$  keine Nullstellen auf  $\mathbb{H}$ . Insbesondere ist die Abbildung

$$S_{k+12} \rightarrow M_k, \quad g \mapsto g/\Delta$$

wohldefiniert, und liefert die Umkehrabbildung zu  $f \mapsto \Delta \cdot f$ .  $\square$

**Satz 2.5.5.** Für gerade  $k \leq 12$  sind die Räume  $M_k$  und  $S_k$  folgendermaßen gegeben.

1.  $M_k = S_k = \{0\}$  für  $k < 0$ .
2.  $M_0 = \mathbb{C}$  und  $S_0 = \{0\}$ .
3.  $M_2 = S_2 = \{0\}$ .
4.  $M_k = \mathbb{C}E_k$  und  $S_k = \{0\}$  für  $k = 4, 6, 8, 10$ .
5.  $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$  und  $M_{12} = \mathbb{C}E_{12} \oplus \mathbb{C}\Delta$ .

*Beweis.* 1. Für  $k < 0$  ist die rechte Seite der Gewichtsformel negativ, aber die linke Seite ist stets positiv.

## 2.5 Die Gewichtsformel und die Struktur von $M_k$

2. Wäre  $f \in M_0$  nicht konstant, so wäre  $f - f(i)$  ebenfalls nicht konstant und hätte eine Nullstelle bei  $i$ . Damit wäre die linke Seite der Gewichtsformel größer oder gleich  $\frac{1}{2}$ , und die rechte Seite gleich 0.
3. Für  $k = 2$  ist die rechte Seite der Gewichtsformel gleich  $\frac{1}{6}$ . Die rechte Seite der Gewichtsformel kann den Wert  $\frac{1}{6}$  aber nicht annehmen, da die Ordnungen von  $f$  bei  $\infty$  und bei Punkten in  $\mathbb{H}$  ganze Zahlen sind.
4. Für  $k = 4, 6, 8, 10$  und  $f \in S_k$  ist  $f/\Delta \in M_{k-12}$  nach dem letzten Lemma eine Modulform negativen Gewichts, und verschwindet daher identisch. Es folgt  $S_k = \{0\}$ , und wegen  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$  dann auch  $M_k = \mathbb{C}E_k$ .
5. Ist  $f \in S_{12}$  eine Spitzenform, so ist nach dem letzten Lemma die Funktion  $f/\Delta \in M_0$  eine Modulform vom Gewicht 0, also eine Konstante.

□

**Satz 2.5.6.** *Für gerade  $k \geq 2$  gilt die Dimensionsformel*

$$\dim(M_k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \end{cases}$$

und  $\dim(S_k) = \dim(M_k) - 1$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach  $k$ . Nach dem letzten Satz stimmt die Formel für  $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ . Es sei nun  $k > 12$ . Wir nehmen an, dass die Dimensionsformel richtig ist für alle Gewichte kleiner  $k$ . Da die Abbildung  $S_k \rightarrow M_{k-12}, f \mapsto f/\Delta$  ein Isomorphismus ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(M_k) &= 1 + \dim(S_k) = 1 + \dim(M_{k-12}) \\ &= 1 + \begin{cases} \left\lfloor \frac{k-12}{12} \right\rfloor, & \text{falls } k-12 \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k-12}{12} \right\rfloor + 1, & \text{falls } k-12 \not\equiv 2 \pmod{12}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten die behauptete Dimensionsformel.

□

**Satz 2.5.7.** *Für gerade  $k \geq 4$  ist eine Basis von  $M_k$  gegeben durch die Funktionen*

$$E_4^\alpha E_6^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k.$$

*Insbesondere lässt sich jede Modulform  $f \in M_k$  eindeutig schreiben als ein Polynom in  $E_4$  und  $E_6$ , das heißt, wir haben einen Ringisomorphismus*

$$M_* = \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} M_k \cong \mathbb{C}[E_4, E_6] \cong \mathbb{C}[X, Y].$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

*Beweis.* Wir zeigen per Induktion nach  $k \geq 0$ , dass sich jedes  $f \in M_k$  als Polynom in  $E_4$  und  $E_6$  schreiben lässt. Die Monome haben dann die Form  $CE_4^\alpha E_6^\beta$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$ , so dass sich  $f$  als Linearkombination der  $E_4^\alpha E_6^\beta$  schreiben lässt.

Für  $k = 0, 2, 4, 6$  ist die Behauptung nach Satz 2.5.5 klar. Für  $k = 8$  und  $k = 10$  folgt aus Dimensionsgründen und durch Vergleichen der konstanten Fourierkoeffizienten  $E_8 = E_4^2$  und  $E_{10} = E_4 E_6$ . Es sei nun  $k \geq 12$ . Wir nehmen an, dass sich jede Modulform vom Gewicht kleiner  $k$  als Polynom in  $E_4$  und  $E_6$  schreiben lässt. Wir wählen  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$  so dass  $4\alpha + 6\beta = k$  gilt. Dann hat  $E_4^\alpha E_6^\beta$  Gewicht  $k$  und konstanten Term 1, und es folgt wie im Beweis von Lemma 2.3.8, dass  $M_k = \mathbb{C}E_4^\alpha E_6^\beta \oplus S_k$  gilt. Ist  $f \in S_k$ , so ist  $f = g\Delta$  für ein  $g \in M_{k-12}$ , welches sich nach Induktionsannahme als Polynom in  $E_4, E_6$  schreiben lässt. Andererseits ist auch  $\Delta$  ein Polynom in  $E_4, E_6$ , so dass dasselbe auch für  $f$  gilt. Wir haben damit gezeigt, dass sich jede Modulform  $f \in M_k$  schreiben lässt als Linearkombination der Funktionen

$$E_4^\alpha E_6^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k.$$

Man macht sich klar, dass die Anzahl aller  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$  durch die gleiche Formel wie  $\dim(M_k)$  in Satz 2.5.6 gegeben ist. Daher bilden diese Funktionen sogar eine Basis von  $M_k$ .  $\square$

**Bemerkung 2.5.8.** Der Satz impliziert insbesondere, dass  $M_k$  und  $S_k$  Basen mit *ganzzahligen* Fourierkoeffizienten haben.

## 2.6 Die $j$ -Invariante und modulare Funktionen

**Definition 2.6.1.** Die  $j$ -Invariante ist die Funktion

$$j(\tau) = \frac{E_4^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Da  $\Delta$  keine Nullstellen auf  $\mathbb{H}$  hat, ist  $j$  holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Außerdem ist  $j$  invariant unter  $\Gamma$ , das heißt, es gilt

$$j(M\tau) = j(\tau)$$

für alle  $M \in \Gamma$ , da  $E_4^3$  und  $\Delta$  beide Gewicht 12 haben. Aus den Fourierentwicklungen von  $E_4^3$  und  $\Delta$  erhält man die Fourierentwicklung von  $j$ :

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots$$

Insbesondere ist  $j$  keine Modulform im Sinne unserer ursprünglichen Definition, da die Fourierentwicklung Terme mit negativen  $q$ -Exponenten hat. Dies gibt Anlass zu folgender Verallgemeinerung der Definition einer Modulform:

**Definition 2.6.2.** Eine Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *modulare Funktion* (oder *Modulfunktion*), falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $f$  ist meromorph auf  $\mathbb{H}$ ,
2.  $f(M\tau) = f(\tau)$  für alle  $M \in \Gamma$  und  $\tau \in \mathbb{H}$ ,



## 2.6 Die $j$ -Invariante und modulare Funktionen

3.  $f$  hat für  $\tau \in \mathbb{H}$  mit  $\text{Im}(\tau) > \max\{\text{Im}(\tau_0) : \tau_0 \in \mathbb{H} \text{ ist Pol von } f\}$  eine Fourierreentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_f(n)q^n$$

für ein  $n_0 \in \mathbb{Z}$

**Bemerkung 2.6.3.** Im Gegensatz zur Definition von Modulformen erlauben wir bei modularen Funktionen Pole auf der oberen Halbebene und einen Pol bei  $\infty$ . Außerdem beschränken wir uns auf Gewicht 0. Lässt man auch Gewicht  $k$  zu, so erhält man *meromorphe Modulformen vom Gewicht  $k$* .

**Bemerkung 2.6.4.** Die Menge aller modularer Funktionen bildet einen Körper.

**Bemerkung 2.6.5.** Die Fourierreentwicklung einer modularen Funktion  $f$  stellt  $f$  nicht auf ganz  $\mathbb{H}$  dar, sondern nur oberhalb aller Pole von  $f$ .

**Bemerkung 2.6.6.** Die Gewichtsformel gilt mit dem gleichen Beweis auch für modulare Funktionen (und meromorphe Modulformen). Für modulare Funktionen  $f \neq 0$  vereinfacht sie sich zu

$$\text{ord}_{\infty}(f) + \sum_{\tau \in \Gamma \setminus \mathbb{H}} \frac{1}{\text{ord}(\tau)} \text{ord}_{\tau}(f) = 0.$$

Es ist klar, dass jede rationale Funktion in  $j$  eine modulare Funktion ist. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

**Satz 2.6.7.** *Jede modulare Funktion lässt sich als rationale Funktion in  $j$  schreiben, und ist genau dann holomorph auf  $\mathbb{H}$ , wenn sie ein Polynom in  $j$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $f$  eine modulare Funktion. Weiter seien  $\tau_1, \dots, \tau_m$  die Pole von  $f$  in  $\mathbb{H}$  modulo  $\Gamma$  mit Ordnungen  $\nu_1, \dots, \nu_m$ . Dann ist die Funktion

$$g(\tau) = f(\tau) \cdot \prod_{\ell=1}^m (j(\tau) - j(\tau_{\ell}))^{\nu_{\ell}}$$

eine modulare Funktion, die holomorph auf  $\mathbb{H}$  ist. Wir zeigen, dass  $g$  ein Polynom in  $j$  ist. Die modulare Funktion  $g$  hat eine Fourierreentwicklung der Form

$$g = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_g(n)q^n.$$

Man zeigt leicht per Induktion, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}_0$  eine modulare Funktion  $j_n$  gibt, die auf  $\mathbb{H}$  holomorph ist, deren Fourier-Entwicklung die Form  $q^{-n} + O(q)$  hat, und die sich als Polynom in  $j$  schreiben lässt. Zum Beispiel ist  $j_0 = 1$  und  $j_1 = j - 744$ . Dann ist die Funktion

$$g - \sum_{n \geq 0} a_g(-n)j_n$$

auf  $\mathbb{H}$  holomorph und verschwindet bei  $\infty$ , und ist daher nach der Gewichtsformel gleich 0. Daraus folgt

$$g = \sum_{n \geq 0} a_g(-n)j_n.$$

Somit lässt sich  $g$  als Polynom in  $j$  schreiben, und  $f$  als rationale Funktion in  $j$ . □

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

Sind  $f, g$  holomorphe Modulformen gleichen Gewichts mit  $g \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  offenbar eine modulare Funktion. Umgekehrt gilt:

**Korollar 2.6.8.** *Jede modulare Funktion ist der Quotient zweier holomorpher Modulformen.*

*Beweis.* Man kann jede modulare Funktion  $f$  als Quotient  $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$  mit Polynomen  $P, Q$  schreiben. Ist  $r$  das Maximum der Grade von  $P$  und  $Q$ , so sind  $P(j)\Delta^r$  und  $Q(j)\Delta^r$  holomorphe Modulformen, und es gilt  $f = \frac{P(j)\Delta^r}{Q(j)\Delta^r}$ .  $\square$

Wir untersuchen nun die Werte von  $j$  auf  $\mathbb{H}$ :

**Lemma 2.6.9.**

1.  $j$  hat an der Stelle  $\tau = \rho$  eine Nullstelle der Ordnung 3, und keine weiteren Nullstellen in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ .
2.  $j - 1728$  hat an der Stelle  $\tau = i$  eine Nullstelle der Ordnung 2, und es gilt  $j(\tau) \neq 1728$  für alle anderen  $\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$ .
3. Jede von 0 und 1728 verschiedene komplexe Zahl wird von  $j$  auf  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  genau einmal und von erster Ordnung angenommen.

*Beweis.* Für jede komplexe Zahl  $z$  ist  $j - z$  ebenfalls eine modulare Funktion mit einem einfachen Pol bei  $\infty$ , und die Gewichtsformel angewendet auf  $j - z$  liefert

$$\sum_{\tau \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\text{ord}(\tau)} \text{ord}_{\tau}(j - z) = 1.$$

Da  $E_4$  eine Nullstelle bei  $\rho$  hat, hat auch  $j$  eine Nullstelle bei  $\rho$ , also  $\text{ord}_{\rho}(j) \geq 1$ . Mit der obigen Gewichtsformel (für  $z = 0$ ) und  $\text{ord}_{\tau}(j) \geq 0$  für  $\tau \in \mathbb{H}$  folgt leicht, dass  $\text{ord}_{\rho}(j) = 3$  sein muss, und dass  $j$  keine weiteren Nullstellen modulo  $\Gamma$  hat. Dies zeigt den ersten Punkt. Die anderen Aussagen zeigt man ähnlich.  $\square$

**Korollar 2.6.10.** *Die Abbildung*

$$j : \Gamma \backslash \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

*ist eine Bijektion.*

## 2.7 Die Eisensteinreihe vom Gewicht 2

**Definition 2.7.1.** Die bedingt konvergente Eisensteinreihe vom Gewicht 2 ist für  $\tau \in \mathbb{H}$  definiert durch

$$G_2(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n^{-2} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \right).$$

Die Eisensteinreihe  $G_2$  konvergiert nicht absolut, definiert aber eine holomorphe Funktion.

**Lemma 2.7.2.** *Die Eisensteinreihe  $G_2$  ist holomorph auf  $\mathbb{H}$  und bei  $\infty$ , und hat die Fourierentwicklung*

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n,$$

*mit der Teilersummenfunktion  $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ .*

*Beweis.* Mithilfe der Lipschitz-Formel (2.3.1) erhält man für  $m \geq 1$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} = -4\pi^2 \sum_{d=1}^{\infty} d e^{2\pi i d m \tau}.$$

Die weitere Rechnung verläuft analog zur Berechnung der Fourierentwicklung der Eisensteinreihen  $G_k$  für  $k \geq 4$  wie in Lemma 2.3.4.

Da  $\sigma_1(n)$  polynomiell in  $n$  wächst, konvergiert die Fourierentwicklung von  $G_2$  absolut und lokal gleichmäßig, und definiert daher eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Da die definierende Reihe von  $G_2$  nicht absolut konvergiert, funktioniert der Beweis der Modularität von  $G_k$  mit  $k \geq 4$  nicht für  $G_2$ . Wir haben außerdem gesehen, dass es keine nicht-trivialen Modulformen vom Gewicht 2 gibt, so dass  $G_2$  keine Modulform sein kann. Es gilt aber der folgende

**Satz 2.7.3.** Für  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt

$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i \tau.$$

*Beweis.* Wir schreiben die definierende Reihe von  $G_2$  als

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2 \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \left( (m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2} \right)$$

und ersetzen  $\tau$  durch  $-1/\tau$ :

$$G_2(-1/\tau) = \frac{\pi^2}{3} \tau^2 \left( 1 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2\tau^2 \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \left( (n\tau + m)^{-2} + (n\tau - m)^{-2} \right).$$

Wir setzen

$$F(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left( \tau^2 G_2(\tau) - G(-1/\tau) \right) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{mn} - \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} A_{mn} \quad (2.7.1)$$

mit

$$A_{mn} = \frac{1}{(m\tau + n)^2} + \frac{1}{(m\tau - n)^2}.$$

Beachte, dass die Reihen auf der rechten Seite von (2.7.1) nicht absolut konvergent sind, das heißt, die Summationsreihenfolge darf nicht vertauscht werden. Wir führen die Hilfsfunktion

$$B_{mn} = \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n + 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)(m\tau - n + 1)}$$

für  $m, n \geq 1$  ein. Dann gilt

$$A_{mn} - B_{mn} = \frac{1}{(m\tau + n)^2(m\tau + n + 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)^2(m\tau - n + 1)}.$$

Wie im Beweis der Konvergenz der Eisensteinreihen  $G_k$  benutzen wir nun, dass ein  $\alpha > 0$  existiert, so dass  $|m\tau + n| > \alpha |mi + n|$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  gilt (dabei ist  $\tau$  fest), und erhalten nach einer einfachen Abschätzung

$$|A_{mn} - B_{mn}| < C \frac{1}{(mn)^{3/2}}$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

für eine Konstante  $C$  und alle  $m, n \geq 1$ . Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} (A_{mn} - B_{mn})$$

absolut. Man darf also die Summationsreihenfolge vertauschen und erhält

$$F(\tau) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} B_{mn} - \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} B_{mn}.$$

Es gilt  $B_{mn} + B_{m(n+1)} = 0$ , so dass für die erste Summe in  $F$  folgt, dass

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} B_{mn} = 0.$$

In der zweiten Summe schreiben wir

$$\tau \sum_{m \geq 1} B_{mn} = \sum_{m \geq 1} \left( \frac{2(n-1)/\tau}{((n-1)/\tau)^2 - m^2} - \frac{2n/\tau}{(n/\tau)^2 - m^2} \right) = \varphi(n-1) - \varphi(n)$$

Mit der Partialbruchzerlegung der Kotangens (2.3.2) erhalten wir

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \pi \cot(\pi\xi/\tau) - \frac{1}{\xi/\tau}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

Zusammen ergibt sich

$$\tau F(\tau) = -\tau \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} B_{mn} = -\sum_{n \geq 1} (\varphi(n-1) - \varphi(n)) = -\varphi(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n).$$

Für  $z = x + iy$  gilt

$$\cot(z) = i \frac{1 + e^{-2ix+2y}}{1 - e^{-2ix+2y}}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \cot(z) = i.$$

Mit  $z = \pi n/\tau$  gilt wegen  $\text{Im}(1/\tau) < 0$  schließlich  $\tau F(\tau) = \pi i$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 2.7.4.** Aus dem Satz folgt, dass die *nicht-holomorphe Eisensteinreihe*

$$G_2^*(\tau) = G_2(\tau) - \frac{\pi}{\text{Im}(\tau)}$$

wie eine Modulform vom Gewicht 2 transformiert.

Wir definieren noch die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht 2 durch

$$E_2(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2)} G_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n,$$

sowie ihre nicht-holomorphe modulare Version

$$E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \text{Im}(\tau)}.$$

## 2.8 Die Dedekindsche Eta-Funktion

Wir führen die Dedekindsche Eta-Funktion ein und beweisen mit ihrer Hilfe die Produktdarstellung von  $\Delta$ .

**Definition 2.8.1.** Die *Dedekindsche Eta-Funktion* ist definiert als

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

für  $\tau \in \mathbb{H}$ .

Das Produkt konvergiert absolut und lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{H}$ , und definiert daher eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$  mit  $\eta(\tau) \neq 0$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ .

Es gilt der folgende Zusammenhang mit der Eisensteinreihe vom Gewicht 2.

**Lemma 2.8.2.** Für  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt

$$\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = \frac{i}{4\pi} G_2(\tau).$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} &= \frac{\partial}{\partial z} \log(\eta(\tau)) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{24} \log(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^n) \right) \\ &= \frac{2\pi i}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\pi i n q^n}{1 - q^n} \\ &= \frac{\pi i}{12} \left( 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=1}^{\infty} q^{mn} \right) \\ &= \frac{\pi i}{12} \left( 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \right) = \frac{i}{4\pi} G_2(\tau). \end{aligned}$$

□

Mithilfe des Transformationsverhaltens von  $G_2$  erhalten wir auch das Verhalten von  $\eta$  unter den Erzeugern  $T$  und  $S$  von  $\Gamma$ .

**Satz 2.8.3.** Für  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{2\pi i/24} \eta(\tau), \\ \eta(-1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \end{aligned}$$

mit dem Hauptzweig der Wurzel.

*Beweis.* Die erste Gleichung folgt sofort aus der Definition von  $\eta$ .

Zum Nachweis der zweiten Gleichung benutzen wir den Zusammenhang zwischen  $\eta$  und  $G_2$  aus dem letzten Lemma. Wir setzen  $f = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{i}{4\pi} G_2$ . Das Transformationsverhalten von  $G_2$  aus Satz 2.7.3 liefert

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\tau^2} - f(\tau) - \frac{1}{2\tau} = 0$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Setzt man

$$g(y) = \frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}, \quad y > 0,$$

so folgt

$$-i \frac{g'(y)}{g(y)} = f\left(\frac{i}{y}\right) \frac{1}{(iy)^2} - f(iy) - \frac{1}{2iy} = 0,$$

also  $g'(y) = 0$  für alle  $y > 0$ , das heißt,  $g$  ist konstant. Es gilt also

$$\eta(i/y) = \gamma\sqrt{y}\eta(iy).$$

für eine Konstant  $\gamma$  und alle  $y > 0$ . Setzt man  $y = 1$  ein, so erhält man  $\gamma = 1$ , also die Gleichung

$$\eta(i/y) = \sqrt{y}\eta(iy)$$

für alle  $y > 0$ . Zusammen mit dem Identitätssatz folgt daraus die zweite Gleichung im Satz.  $\square$

**Bemerkung 2.8.4.** Aus dem Satz folgt, dass  $\eta$  für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  das Transformationsverhalten

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \nu_\eta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \sqrt{c\tau + d} \eta(\tau)$$

besitzt, wobei  $\nu_\eta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$  eine vierundzwanzigste Einheitswurzel ist. Mit etwas mehr Aufwand kann man diese Einheitswurzel auch ganz explizit bestimmen. Man sagt, dass  $\eta$  eine Modulform vom Gewicht  $1/2$  ist.

Aus dem Transformationsverhalten von  $\eta$  folgt nun leicht die Produktentwicklung von  $\Delta$ .

**Korollar 2.8.5.** *Es gilt*

$$\Delta = \eta^{24} = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

*Beweis.* Aus dem letzten Satz folgt  $\eta^{24}|_{12}T = \eta^{24}|_{12}S = \eta^{24}$ , also  $\eta^{24} \in M_{12}$ . Ausmultiplizieren der Produktentwicklung zeigt, dass  $\eta^{24} \in S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ , und Vergleichen der Koeffizienten bei  $q$  liefert schließlich  $\eta^{24} = \Delta$ .  $\square$

## 2.9 Modulformen zu Kongruenzuntergruppen

Eine Untergruppe  $\Lambda \subset \Gamma$  heißt *Kongruenzuntergruppe der Stufe  $N$* , falls sie die *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

enthält. Dabei ist die Kongruenz eintragsweise zu verstehen. Wichtige Beispiele von Kongruenzuntergruppen sind

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

und

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Offenbar gilt

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \Gamma.$$

**Lemma 2.9.1.** *Jede Kongruenzuntergruppe hat endlichen Index in  $\Gamma$ .*

*Beweis.* Da  $\Gamma(N)$  der Kern der komponentenweisen Reduktion  $\Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  ist und  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  eine endliche Gruppe ist, ist  $\Gamma(N)$  ein Normalteiler von endlichem Index in  $\Gamma$ . Somit hat auch jede Untergruppe von  $\Gamma$ , die  $\Gamma(N)$  enthält, endlichen Index in  $\Gamma$ .  $\square$

**Bemerkung 2.9.2.** Man kann explizite Formeln für die Indices von  $\Gamma(N)$ ,  $\Gamma_1(N)$  und  $\Gamma_0(N)$  angeben. Es gilt

$$\begin{aligned} [\Gamma : \Gamma(N)] &= N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \\ [\Gamma : \Gamma_1(N)] &= N^2 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \\ [\Gamma : \Gamma_0(N)] &= N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Die Bestimmung dieser Formeln findet man im Buch von Diamond und Shurman.

Die Gruppe  $\Gamma$  operiert auf der Menge  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha + b\beta}{c\alpha + d\beta}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = \frac{a}{c},$$

mit  $\frac{\pm 1}{0} = \infty$ . Für eine Kongruenzuntergruppe  $\Lambda$  heißen die  $\Lambda$ -Klassen von  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  die *Spitzen* von  $\Lambda$ .

**Lemma 2.9.3.** *Jede Kongruenzuntergruppe hat endlich viele Spitzen.*

*Beweis.* Sind zwei Matrizen  $M_1, M_2 \in \Gamma$  äquivalent modulo  $\Lambda$ , also  $M_1 = LM_2$  für ein  $L \in \Lambda$ , so sind auch die Spitzen  $M_1\infty$  und  $M_2\infty$  äquivalent. Da jede Spitze in dieser Form geschrieben werden kann, ist die Anzahl der Spitzen durch die Anzahl der Nebenklassen in  $\Lambda \backslash \Gamma$  beschränkt, also insbesondere endlich.  $\square$

Man kann auch für die Anzahlen der Spitzen von  $\Gamma(N)$ ,  $\Gamma_1(N)$  und  $\Gamma_0(N)$  explizite Formeln angeben. Für die Formeln verweisen wir auf das Buch von Diamond und Shurman.

**Beispiel 2.9.4.** Die Gruppe  $\Gamma$  hat nur eine Spitze, die man üblicherweise durch  $\infty$  repräsentiert. Die Gruppe  $\Gamma_0(p)$  mit einer Primzahl  $p$  hat zwei Spitzen, die durch 0 und  $\infty$  repräsentiert werden.

**Definition 2.9.5.** Es sei  $\Lambda$  eine Kongruenzuntergruppe der Stufe  $N$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Modulform* vom Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$  für  $\Lambda$ , falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $f$  ist holomorph auf  $\mathbb{H}$ ,

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

2.  $f|_k M = f$  für alle  $M \in \Lambda$ ,
3. Für jedes  $L \in \Gamma$  besitzt die Funktion  $f|_k L$  eine Fourierentwicklung

$$(f|_k L)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,L}(n) q^{n/N}$$

mit Koeffizienten  $a_{f,L}(n) \in \mathbb{C}$ .

Gilt  $a_{f,L}(0) = 0$  für alle  $L \in \Gamma$ , so heißt  $f$  *Spitzenform*. Wir schreiben  $M_k(\Lambda)$  bzw.  $S_k(\Lambda)$  für die Vektorräume aller Modulformen bzw. Spitzenformen vom Gewicht  $k$  für  $\Lambda$ .

**Bemerkung 2.9.6.** 1. Bedingung (3) ist äquivalent dazu, dass  $f|_k L$  für alle  $L \in \Gamma$  beschränkt ist (bzw. verschwindet) für  $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ . Man sagt  $f$  *ist holomorph in den Spitzen* bzw.  $f$  *verschwindet in den Spitzen*.

2. Gilt  $L = ML'$  für  $L, L' \in \Gamma$  und  $M \in \Lambda$ , so haben wir

$$f|_k L = f|_k L',$$

das heißt, die Fourierentwicklungen von  $f|_k L$  und  $f|_k L'$  sind gleich. Insbesondere muss man Bedingung (3) nur für ein (endliches) Repräsentantensystem von  $\Lambda \backslash \Gamma$  prüfen.

3. Für jede Spitze  $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  mit  $(a, c) = 1$  gibt es eine Matrix  $L \in \Gamma$  mit  $L\infty = \frac{a}{c}$ . Man nennt die Fourierentwicklung von  $f|_k L$  die *Entwicklung von  $f$  an der Spitze  $\frac{a}{c}$* . Beachte, dass dies eigentlich nicht wohldefiniert ist (das untersuchen wir genauer in den Übungen). Es genügt sogar, Bedingung (3) für die endlich vielen Spitzen von  $\Lambda$  zu prüfen.

**Beispiel 2.9.7.** 1. Für  $N \in \mathbb{N}$  und gerade  $k \geq 4$  ist die Eisensteinreihe

$$E_{k, \Gamma_0(N)}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} 1|_k M$$

eine Modulform vom Gewicht  $k$  für  $\Gamma_0(N)$ . Man kann die Fourierentwicklungen an den Spitzen explizit berechnen, dies wollen wir hier aber nicht ausführen.

2. Für  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq 2$  ist

$$E_{2, \Gamma_0(N)}(\tau) = E_2(\tau) - NE_2(N\tau) \in M_2(\Gamma_0(N))$$

eine nichttriviale Modulform vom Gewicht 2.

3. Es gilt  $S_2(\Gamma_0(N)) = 0$  für  $1 \leq N \leq 10$ . Für  $N = 11$  wird  $S_2(\Gamma_0(11))$  aufgespannt von  $\eta^2(\tau)\eta^2(11\tau)$ . Man kann allgemeiner Modulformen zu  $\Gamma_0(N)$  konstruieren als *Eta-Produkte* (bzw. *Eta-Quotienten*)

$$\prod_{d|N} \eta(d\tau)^{a_d},$$

mit Koeffizienten  $a_d \in \mathbb{Z}$ , die gewisse lineare Gleichungen erfüllen müssen.

Man kann Modulformen zu Kongruenzuntergruppen zu Modulformen zur vollen Modulgruppe  $\Gamma$  anheben.



## 2.9 Modulformen zu Kongruenzuntergruppen

**Satz 2.9.8.** *Es sei  $\Lambda$  eine Kongruenzuntergruppe vom Index  $\ell = [\Gamma : \Lambda]$ . Ist  $f \in M_k(\Lambda)$ , so gilt*

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} f|_k M \in M_k, \quad \pi(f) = \prod_{M \in \Lambda \backslash \Gamma} f|_k M \in M_{k\ell}.$$

*Beweis.* Dies folgt sofort daraus, dass für  $L \in \Gamma$  mit  $M$  auch  $ML$  ein Repräsentantensystem von  $\Lambda \backslash \Gamma$  durchläuft.  $\square$

**Beispiel 2.9.9.** Für  $k \geq 4$  gilt

$$\mathrm{tr}(E_{k, \Gamma_0(N)}) = E_k, \quad \mathrm{tr}(E_{2, \Gamma_0(N)}) = 0.$$

Mithilfe dieser Abbildungen kann man viele Aussagen über Modulformen zu Kongruenzuntergruppen  $\Lambda$  zurückführen auf Aussagen über Modulformen zu  $\Gamma$ . Wir erhalten zum Beispiel leicht, dass es keine Modulformen negativen Gewichts zu Kongruenzuntergruppen gibt.

**Satz 2.9.10.** *Es sei  $\Lambda$  eine Kongruenzuntergruppe der Stufe  $N$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. Für  $k < 0$  gilt  $M_k(\Lambda) = \{0\}$ .
2.  $M_0(\Lambda) = \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Sei  $f \in M_k(\Lambda)$  und  $\ell = [\Gamma : \Lambda]$ . Dann ist  $\pi(f) \in M_{k\ell}$ . Ist  $k < 0$  so ist  $M_{k\ell} = \{0\}$ , also  $\pi(f) = 0$ , woraus mit dem Identitätssatz  $f = 0$  folgt. Den Fall  $k = 0$  lassen wir als Übungsaufgabe.  $\square$

Außerdem erhalten wir eine einfache Abschätzung der Dimension von  $M_k(\Lambda)$ .

**Satz 2.9.11.** *Es sei  $\Lambda$  eine Kongruenzuntergruppe der Stufe  $N$  vom Index  $\ell = [\Gamma : \Lambda]$ . Es sei  $L \in \Gamma$  und  $f \in M_k(\Lambda)$  mit Fourierentwicklung*

$$f|_k L = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f,L}(n) q^{n/N}.$$

Dann folgt aus

$$a_{f,L}(n) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq \frac{k\ell N}{12}$$

schon  $f = 0$ .

*Beweis.* Für  $g = \pi(f) \in M_{k\ell}$  gilt

$$a_g(n) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq \frac{k\ell}{12},$$

also  $\mathrm{ord}_{\infty}(g) > \frac{k\ell}{12}$ . Aus der Gewichtsformel folgt  $g = 0$ , und mit dem Identitätssatz erhalten wir  $f = 0$ .  $\square$

**Korollar 2.9.12.** *Mit den Notationen aus dem letzten Satz gilt*

$$\dim M_k(\Lambda) \leq \left\lfloor \frac{k\ell N}{12} \right\rfloor + 1.$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

*Beweis.* Sind  $f_1, \dots, f_r \in M_k(\Lambda)$  mit  $r > \lfloor \frac{k\ell N}{12} \rfloor + 1$ , so kann man durch geeignete Wahl von  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$  erreichen, dass die Koeffizienten von  $\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i$  vom Index  $0 \leq n \leq \frac{k\ell N}{12}$  verschwinden (da die  $r$  Vektoren, die man aus den ersten  $\lfloor \frac{k\ell N}{12} \rfloor + 1$  Koeffizienten der  $f_i$  gewinnt, linear abhängig sind). Aus dem letzten Satz folgt  $\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i = 0$ , das heißt, die  $f_i$  sind linear abhängig. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 2.9.13.** Es sei  $\Lambda = \Gamma_0(2)$ . Der Index von  $\Gamma_0(2)$  in  $\Gamma$  ist  $\ell = [\Gamma : \Gamma_0(2)] = 3$ , und die Stufe ist  $N = 2$ . Nach dem letzten Korollar gilt

$$\dim M_2(\Gamma_0(2)) \leq \left\lfloor \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{12} \right\rfloor + 1 = 2.$$

Außerdem ist  $\dim S_2(\Gamma_0(2)) = 0$ , denn mit  $f \in S_2(\Lambda)$  ist  $\pi(f) \in S_6$ , also muss  $f = 0$  sein. Man kann zeigen, dass  $\dim M_2(\Gamma_0(2)) = 1$ .

**Bemerkung 2.9.14.** Für  $k \geq 2$  kann man explizite Formeln für die Dimensionen von  $M_k(\Lambda)$  und  $S_k(\Lambda)$  bestimmen. Dazu fasst man  $\Lambda \backslash \mathbb{H}$  als Riemannsche Fläche auf und verwendet den Satz von Riemann-Roch.

## 2.10 Die Jacobische Thetareihe und der Vier-Quadrate-Satz

Die Reihe

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots$$

heißt *Jacobische Thetafunktion*. Sie ist holomorph auf  $\mathbb{H}$  und sie erfüllt die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau + 1) &= \vartheta(\tau), \\ \vartheta(\tau) + \vartheta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) &= 2\vartheta(4\tau), \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

wie man leicht mittels der Definition von  $\vartheta(\tau)$  überprüft. Darüber hinaus erfüllt sie die *Theta-Transformationsformel*:

**Satz 2.10.1.** *Es gilt*

$$\vartheta\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{-2i\tau} \vartheta(\tau)$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ .

Zum Beweis dieser Gleichung benutzt man die *Poissonsche Summenformel* für Schwartzfunktionen. Als *Schwartzfunktion* (oder *schnell abfallende Funktion*) bezeichnet man eine glatte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) \right| < \infty$$

ist für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ , das heißt,  $f$  und alle Ableitungen von  $f$  klingen für  $x \rightarrow \pm\infty$  schneller ab als das Inverse jeden Polynoms. Das Standardbeispiel einer Schwartzfunktion ist die Funktion  $e^{-x^2}$ . Der Raum aller Schwartzfunktionen wird mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  bezeichnet.

## 2.10 Die Jacobische Thetareihe und der Vier-Quadrate-Satz

Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist die *Fouriertransformierte* von  $f$  definiert als

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Man kann zeigen, dass  $\hat{f}$  ebenfalls eine Schwartzfunktion ist.

**Lemma 2.10.2** (Poissonsche Summenformel). *Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + x).$$

Da  $f$  eine Schwartzfunktion ist, ist  $g$  glatt. Außerdem gilt  $g(x + 1) = g(x)$ , das heißt,  $g$  ist 1-periodisch. Daher besitzt  $g$  die Fourierreiheentwicklung

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 g(\xi) e^{-2\pi i k \xi} d\xi \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + \xi) e^{-2\pi i k \xi} d\xi \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i k \xi} d\xi \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $x = 0$ , so erhalten wir die Poissonsche Summenformel. □

*Beweis von Satz 2.10.1.* Beachte zunächst, dass beide Seiten holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{H}$  sind. Es genügt daher nach dem Identitätssatz, die behauptete Gleichung für  $\tau = it/2$  mit  $t > 0$  zu zeigen, da diese Menge einen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$  besitzt. Die Gleichung lautet dann

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

für  $t > 0$ . Wir wenden die Poissonsche Summenformel auf die Schwartzfunktion  $f_t(x) = e^{-\pi x^2/t}$  an und berechnen

$$\begin{aligned} \hat{f}_t(n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2/t} e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i n \sqrt{t} x} dx \\ &= \sqrt{t} \widehat{e^{-\pi x^2}}(\sqrt{t}n) \\ &= \sqrt{t} e^{-\pi n t^2} \\ &= \sqrt{t} f_{1/t}(n) \end{aligned}$$

## 2 Modulformen zu $SL_2(\mathbb{Z})$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass  $\widehat{e^{-\pi x^2}} = e^{-\pi x^2}$  gilt. Es folgt nun also mittels der Poissonschen Summenformel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{t} f_{1/t}(n) = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t},$$

was zu zeigen war. □

**Satz 2.10.3.** *Es gilt  $\vartheta^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$ .*

*Beweis.* Die Gruppe  $\Gamma_0(4)$  wird erzeugt von den Matrizen

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass  $\vartheta^4$  korrekt unter  $-I$  und  $T$  transformiert. Für  $U$  berechnen wir durch zweimaliges Anwenden der Thetatransformationsformel

$$\begin{aligned} \vartheta^4(U\tau) &= \vartheta^4\left(-\frac{\tau}{4\tau-1}\right) = \vartheta^4\left(-\frac{1}{4(1-\frac{1}{4\tau})}\right) = \left(\sqrt{-2i\left(1-\frac{1}{4\tau}\right)}\right)^4 \vartheta^4\left(1-\frac{1}{4\tau}\right) \\ &= \left(\sqrt{-2i\left(1-\frac{1}{4\tau}\right)}\right)^4 (\sqrt{-2i\tau})^4 \vartheta^4(\tau) = (-4\tau+1)^2 \vartheta^4(\tau) = j(U, \tau)^2 \vartheta^4(\tau), \end{aligned}$$

also transformiert  $\vartheta^4$  auch richtig unter  $U$ .

Die Gruppe  $\Gamma_0(4)$  hat die drei Spitzen  $0, \frac{1}{2}, \infty$ . Per Definition ist  $\vartheta^4$  bei  $\infty$  holomorph. Für die anderen beiden Spitzen haben wir

$$S_\infty = 0, \quad L_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \infty = 1/2.$$

Für die zugehörigen Fourierentwicklungen an den Spitzen gilt mit der Thetatransformationsformel

$$\vartheta^4|_2 S = \tau^{-2} \vartheta^4\left(-\frac{1}{4\frac{\tau}{4}}\right) = \tau^{-2} \left(\sqrt{-2i\frac{\tau}{4}}\right)^4 \vartheta^4\left(\frac{\tau}{4}\right) = -\frac{1}{4} \vartheta^4\left(\frac{\tau}{4}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \vartheta^4|_2 L &= (2\tau+1)^{-2} \vartheta^4\left(\frac{\tau}{2\tau+1}\right) = (2\tau+1)^{-2} \vartheta^4\left(-\frac{1}{4(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\tau})}\right) \\ &= (2\tau+1)^{-2} \left(\sqrt{2i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\tau}\right)}\right)^4 \vartheta^4\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\tau}\right) = -\frac{1}{4\tau^2} \vartheta^4\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\tau}\right). \end{aligned}$$

Aus der Thetatransformationsformel folgt zusammen mit (2.10.1) die Entwicklung

$$\vartheta\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{-2i\tau} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i(n+1/2)^2 \tau}.$$

Damit folgt die Holomorphie von  $\vartheta^4$  an den Spitzen, und insgesamt  $\vartheta^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$ . □

## 2.10 Die Jacobische Thetareihe und der Vier-Quadrate-Satz

Wir wollen nun den Vier-Quadrate-Satz von Lagrange mithilfe der Jacobischen Thetafunktionen und der zuvor entwickelten Theorie der Modulformen beweisen.

**Satz 2.10.4** (Lagrange). *Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen schreiben. Darüber hinaus gilt für  $n \in \mathbb{N}$  die Formel*

$$\#\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n\} = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d.$$

*Beweis.* Äquivalent zum Vier-Quadrate-Satz ist, dass die *Darstellungsanzahl*

$$r_4(n) = \#\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n\}$$

für jede natürliche Zahl  $n$  positiv ist. Die vierte Potenz der Jacobischen Thetafunktion ist genau die erzeugende Reihe der Darstellungsanzahlen  $r_4(n)$ , das heißt, es gilt

$$\vartheta^4(\tau) = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^4 = \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}} q^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) q^n.$$

Die erzeugende Reihe der  $r_4(n)$  ist also eine Modulform vom Gewicht 2 zu  $\Gamma_0(4)$ . Wir wollen diese Tatsache nun ausnutzen, und die im Satz angegebene Formel für  $r_4(n)$  durch einen einfachen Vergleich von Fourierkoeffizienten zweier Modulformen beweisen.

Wir betrachten die Funktion

$$g(\tau) = \frac{1}{3} (4E_2(4\tau) - E_2(\tau)).$$

Wir haben in den Übungen bereits gezeigt, dass  $g \in M_2(\Gamma_0(4))$  ist. Die Fourierentwicklung bei  $\infty$  von  $g(\tau)$  ist gegeben durch

$$g(\tau) = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_1(n) - 4\sigma_1(n/4)) q^n = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d \right) q^n,$$

wobei wir  $\sigma_1(n/4) = 0$  gesetzt haben für  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ . Wir wollen nun Satz 2.9.11 benutzen, um die Identität

$$\vartheta^4(\tau) = \frac{1}{3} (4E_2(4\tau) - E_2(\tau)) \tag{2.10.2}$$

zu zeigen. Wählen wir  $\Lambda = \Gamma_0(4)$ ,  $L = I$  und  $k = 2, \ell = [\Gamma : \Gamma_0(4)] = 6, N = 4$  in Satz 2.9.11, so sehen wir, dass es zum Beweis von (2.10.2) genügt, die Fourierkoeffizienten vom Index  $0 \leq n \leq 4$  zu vergleichen. Das kann man leicht per Hand erledigen, und wir überlassen es daher dem Leser als Übung.

Durch Vergleichen der  $n$ -ten Fourierkoeffizienten in (2.10.2) erhalten wir die explizite Formel

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da die Summe nur positive Summanden hat, und  $d = 1$  stets in der Summe auftaucht, zeigt die Formel, dass sich jede natürliche Zahl (auf mindestens 8 Weisen) als Summe von 4 Quadraten schreiben lässt.  $\square$



## 3 Hecke-Operatoren

In diesem Kapitel führen wir die Hecke-Operatoren  $T_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein. Sie definieren eine kommutierende Familie von Endomorphismen von  $M_k$  und  $S_k$ , die bezüglich eines geeigneten Skalarprodukts auf  $S_k$  selbstadjungiert sind. Wir beginnen mit der Untersuchung des Skalarprodukts.

### 3.1 Das Petersson Skalarprodukt

Wir wollen in diesem Abschnitt den Raum der Spitzenformen  $S_k$  mit einem Skalarprodukt ausstatten. Dazu betrachten wir das *hyperbolische Volumenelement*

$$d\mu(\tau) = \frac{dx dy}{y^2}$$

auf  $\mathbb{H}$ . Es ist invariant unter Modulsstitutionen, das heißt, es gilt

$$d\mu(M\tau) = d\mu(\tau)$$

für alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Das *hyperbolische Volumen* einer Teilmenge  $A \subset \mathbb{H}$  ist definiert als

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A d\mu(\tau)$$

**Beispiel 3.1.1.** Das hyperbolische Volumen des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}$  ist  $\mathrm{vol}(\mathcal{F}) = \frac{\pi}{3}$ .

**Definition 3.1.2.** Es seien  $f, g \in M_k$ , wobei mindestens einer von beiden eine Spitzenform sei. Das *Petersson-Skalarprodukt* von  $f$  und  $g$  ist definiert als

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{F}} f(\tau) \overline{g(\tau)} \mathrm{Im}(\tau)^k d\mu(\tau).$$

**Satz 3.1.3.** *Es seien  $f, g \in M_k$ , wobei mindestens einer von beiden eine Spitzenform sei. Dann konvergiert das Petersson-Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle$  absolut und hat die folgenden Eigenschaften:*

1.  $\langle f, g \rangle$  ist linear in  $f$  und konjugiert-linear in  $g$ .
2.  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ ,
3.  $\langle f, f \rangle \geq 0$  für  $f \in S_k$  und  $\langle f, f \rangle = 0$  genau dann wenn  $f = 0$ .

*Insbesondere definiert  $\langle f, g \rangle$  ein Skalarprodukt (also eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform) auf  $S_k$ .*

*Beweis.* Ist  $f$  oder  $g$  eine Spitzenform, so ist  $fg \in S_{2k}$  eine Spitzenform, und die Funktion  $|f(\tau)g(\tau)|\mathrm{Im}(\tau)^k$  ist auf  $\mathbb{H}$  beschränkt (vergleiche den Beweis von Satz 2.2.5). Da  $\mathcal{F}$  endliches Volumen hat, folgt die absolute Konvergenz von  $\langle f, g \rangle$ . Die übrigen Aussagen überprüft man leicht anhand der Definition.  $\square$

### 3 Hecke-Operatoren

Wir wollen uns als nächstes klar machen, dass die Definition des Petersson-Skalarprodukts nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs abhängt.

**Definition 3.1.4.** Es sei  $\Lambda$  eine Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Ein *Fundamentalbereich*  $\mathcal{G}$  für  $\Lambda$  ist eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathcal{G}$  ist relativ abgeschlossen in  $\mathbb{H}$ ,
2. Zu jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  gibt es ein  $M \in \Lambda$  mit  $M\tau \in \mathcal{G}$ ,
3. Gehören  $\tau$  und  $M\tau$  für  $M \in \Lambda$  zum Inneren von  $\mathcal{G}$ , so gilt  $M = \pm I$ .

**Satz 3.1.5.** *Es sei  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt. Weiter sei*

$$\Gamma(\varphi) = \{M \in \Gamma : \varphi(M\tau) = \varphi(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}\}$$

die Invarianzuntergruppe von  $\varphi$  und  $\Lambda \subset \Gamma(\varphi)$  eine Untergruppe. Sind  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  Fundamentalbereiche für  $\Lambda$ , so gilt

$$\int_{\mathcal{G}_1} \varphi(\tau) d\mu(\tau) = \int_{\mathcal{G}_2} \varphi(\tau) d\mu(\tau).$$

*Beweis.* Da  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  Fundamentalbereiche für sind, gilt

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Lambda} M^{-1}\mathcal{G}_1 = \bigcup_{M \in \Lambda} M\mathcal{G}_2.$$

Die Vereinigungen sind zwar nicht disjunkt, aber die Punkte, die mehrfach auftreten, bilden eine Nullmenge. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}_1} \varphi(\tau) d\mu(\tau) &= \sum_{M \in \Lambda} \int_{M\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_1} \varphi(\tau) d\mu(\tau) \\ &= \sum_{M \in \Lambda} \int_{\mathcal{G}_2 \cap M^{-1}\mathcal{G}_1} \varphi(M\tau) d\mu(M\tau) \\ &= \int_{\mathcal{G}_2} \varphi(\tau) d\mu(\tau), \end{aligned}$$

wobei wir die Invarianz von  $\varphi$  unter  $\Lambda$  und die Invarianz des hyperbolischen Volumenelements benutzt haben.  $\square$

Die Funktion

$$\varphi_{f,g}(\tau) = f(\tau) \overline{g(\tau)} \mathrm{Im}(\tau)^k$$

ist für  $f, g \in M_k$  invariant unter  $\Gamma$ , und sie ist beschränkt auf  $\mathbb{H}$  falls  $f$  oder  $g$  eine Spitzenform ist. Somit folgt aus dem Satz, dass das Petersson-Skalarprodukt nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs abhängt. Man schreibt daher auch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(\tau) \overline{g(\tau)} \mathrm{Im}(\tau)^k d\mu(\tau).$$

Das Petersson-Skalarprodukt definiert ein Skalarprodukt auf  $S_k$ . Es ist aber auch möglich, das Petersson-Skalarprodukt einer Modulform mit einer Spitzenform zu bilden. Wegen der Zerlegung  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$  betrachten wir speziell das Skalarprodukt von  $E_k$  mit einer Spitzenform.



**Satz 3.1.6.** *Es sei  $k \geq 4$  gerade. Für  $f \in S_k$  gilt  $\langle E_k, f \rangle = 0$ .*

*Beweis.* Wir erinnern an die Darstellung

$$E_k = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k M$$

mit der Untergruppe  $\Gamma_\infty = \{\pm T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Wir setzen diese Darstellung in das Skalarprodukt ein und berechnen

$$\begin{aligned} \langle E_k, f \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \left( \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k M \right) \overline{f(\tau)} \operatorname{Im}(\tau)^k d\mu(\tau) \\ &= \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} j(M, \tau)^{-k} \overline{f(\tau)} \operatorname{Im}(\tau)^k d\mu(\tau) \\ &= \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} \overline{f(M\tau)} \operatorname{Im}(M\tau)^k d\mu(M\tau) \\ &= \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{M\mathcal{F}} \overline{f(\tau)} \operatorname{Im}(\tau)^k d\mu(\tau) \\ &= \int_{\bigcup_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} M\mathcal{F}} \overline{f(\tau)} \operatorname{Im}(\tau)^k d\mu(\tau). \end{aligned}$$

Diese Umformung nennt man auch den *Entfaltungstrick*. Die Menge  $\bigcup_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} M\mathcal{F}$  ist ein Fundamentalbereich für  $\Gamma_\infty$ . Man macht sich schnell klar, dass auch der vertikale Streifen  $\{\tau \in \mathbb{H} : 0 \leq x \leq 1\}$  ein Fundamentalbereich für  $\Gamma_\infty$  ist. Wegen der Unabhängigkeit vom Fundamentalbereich erhalten wir

$$\langle E_k, f \rangle = \int_0^\infty \int_0^1 \overline{f(x+iy)} dx y^{k-2} dy.$$

Das innere Integral berechnet sich zu

$$\int_0^1 \overline{f(x+iy)} dx = \overline{a_f(0)} = 0,$$

da  $f$  eine Spitzenform ist. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.1.7.** Der Satz zeigt, dass die Zerlegung  $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$  orthogonal bezüglich des Petersson-Skalarprodukts ist. Man kann allgemeiner das Petersson-Skalarprodukt zweier Modulformen  $f, g \in M_k(\Lambda)$  zu einer Kongruenzuntergruppe  $\Lambda$  betrachten (wobei  $f$  oder  $g$  eine Spitzenform sein muss), und definiert dann den *Raum der Eisensteinreihen*  $\mathcal{E}_k(\Lambda)$  als das orthogonale Komplement von  $S_k(\Lambda)$  in  $M_k(\Lambda)$ . Man hat dann wieder eine orthogonale Zerlegung  $M_k(\Lambda) = \mathcal{E}_k(\Lambda) \oplus S_k(\Lambda)$  in einen Eisenstein-Anteil und einen Spitzenformen-Anteil.

## 3.2 Poincaréreihen

**Definition 3.2.1.** Für  $k \geq 4$  gerade und  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir die  $m$ -te *Poincaréreihe* durch

$$P_{m,k}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} e^{2\pi i m \tau} |_k M.$$

### 3 Hecke-Operatoren

Die Definition der Poincaréreihe macht auch Sinn für  $m = 0$ , aber dann ist  $P_{0,k} = E_k$  die normierte Eisensteinreihe, die sich in vielerlei Hinsicht anders als die Poincaréreihen  $P_{m,k}$  mit  $m \geq 1$  verhält und darum hier nicht als Poincaréreihe bezeichnet werden soll.

**Lemma 3.2.2.** *Es gilt  $P_{m,k} \in S_k$ .*

*Beweis.* Die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz von  $P_{m,k}$  zeigt man genauso wie für die Eisensteinreihe  $E_k$ . Insbesondere ist  $P_{m,k}$  holomorph auf  $\mathbb{H}$  und transformiert nach Konstruktion wie eine Modulform vom Gewicht  $k$ . Der Grenzwert für  $y \rightarrow \infty$  ist gegeben durch

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |P_{m,k}(\tau)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-2\pi m \frac{y}{|c\tau+d|^2}}}{|c\tau+d|^k} = 0,$$

wobei man die letzte Gleichung am Besten durch eine Fallunterscheidung nach  $c = 0$  und  $c \neq 0$  einsieht. Damit verschwindet  $P_{m,k}$  bei  $\infty$ .  $\square$

Die Poincaréreihe  $P_{m,k}$  hat die nützliche Eigenschaft, dass ihr Petersson-Skalarprodukt mit einer Spitzenform  $f$  im Wesentlichen den  $m$ -ten Fourierkoeffizienten von  $f$  herausfiltert.

**Lemma 3.2.3.** *Sei  $k \geq 4$  gerade und  $m \in \mathbb{N}$ . Für  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)q^n \in S_k$  gilt die Formel*

$$\langle f, P_{m,k} \rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_f(m).$$

*Beweis.* Wir setzen die Reihendarstellung von  $P_{m,k}$  ein und erhalten mit dem Entfaltungstrick wie im Beweis von Satz 3.1.6 die Darstellung

$$\langle f, P_{m,k} \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i m(x+iy)} dx e^{-4\pi m y} y^{k-2} dy.$$

Das innere Integral ist gleich  $a_f(m)$ , also erhalten wir

$$\langle f, P_{m,k} \rangle = a_f(m) \int_0^{\infty} e^{-4\pi m y} y^{k-2} dy = a_f(m) \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}},$$

und damit die behauptete Formel.  $\square$

Wir erhalten damit das folgende wichtige Strukturresultat.

**Satz 3.2.4.** *Für gerade  $k \geq 4$  spannen die Poincaréreihen  $P_{m,k}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  den Raum der Spitzenformen  $S_k$  auf.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{P}$  der von den  $P_{k,m}$  aufgespannte Unterraum von  $S_k$  und  $\mathcal{P}^{\perp}$  sein orthogonales Komplement in  $S_k$ . Für  $f \in \mathcal{P}^{\perp}$  gilt nach dem letzten Lemma

$$\frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_f(m) = \langle f, P_{m,k} \rangle = 0$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ , also  $a_f(m) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  und somit  $f = 0$ . Dies zeigt  $\mathcal{P} = S_k$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.5.** Man kann die Fourierentwicklung der Poincaréreihe  $P_{m,k}$  explizit berechnen. Die Formel für den  $n$ -ten Fourierkoeffizienten ist jedoch selbst wieder eine unendliche Reihe, deren Summanden recht komplizierte Exponentialsummen und spezielle Funktionen enthalten, daher geben wir die Formel hier nicht an. Durch sorgfältiges Abschätzen der Fourierkoeffizienten der Poincaréreihen  $P_{m,k}$  kann man die Hecke bound für  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)q^n \in S_k$  verbessern zu

$$|a_f(n)| \leq C_\varepsilon n^{k/2-1/4+\varepsilon}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $\varepsilon > 0$ , mit einer von  $\varepsilon$  abhängigen Konstante  $C_\varepsilon > 0$ . Der Beweis findet sich im Buch von Iwaniec.

Man kann anhand der expliziten Fourierentwicklung von  $P_{m,k}$  auch ablesen, dass die Fourierkoeffizienten reelle Zahlen sind. Dies folgt jedoch auch aus der Relation  $\overline{P_{m,k}(-\bar{\tau})} = P_{m,k}(\tau)$ , die sich anhand der Definition von  $P_{k,m}$  als Reihe überprüfen lässt.

### 3.3 Hecke-Operatoren

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Menge

$$\mathcal{M}_n = \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} : \det(M) = n\}$$

der ganzzahligen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante  $n$ . Die Gruppe  $\Gamma$  operiert von links und von rechts auf  $\mathcal{M}_n$  durch Multiplikation. Wir bestimmen zunächst ein Repräsentantensystem für  $\Gamma \backslash \mathcal{M}_n$ .

**Lemma 3.3.1.** *Ein Repräsentantensystem von  $\Gamma \backslash \mathcal{M}_n$  ist gegeben durch die Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, d > 0, b \pmod{d} \right\}.$$

*Insbesondere ist  $|\Gamma \backslash \mathcal{M}_n| = \sigma_1(n)$  endlich.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass jede Matrix in  $\mathcal{M}_n$  zu einer der angegebenen Matrizen äquivalent ist. Sei dazu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$ . Wähle  $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  mit  $(\gamma, \delta) = 1$  so, dass  $a\gamma + c\delta = 0$ . Wähle nun  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  so, dass  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$  ist. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

für gewisse  $a', b', d' \in \mathbb{Z}$ . Aus der Determinantenbedingung folgt  $a'd' = n$ . Durch Multiplikation mit  $-I$  können wir annehmen, dass  $d' > 0$ , und durch Multiplikation mit  $T^n$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{Z}$  können wir  $b'$  modulo  $d'$  ändern.

Wir zeigen nun, dass je zwei der angegebenen Matrizen inäquivalent sind. Angenommen, es gäbe  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$  so dass

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Ausmultiplizieren zeigt  $a\gamma = 0$ , also  $\gamma = 0$ , und aus der Determinantenbedingung folgt  $\alpha = \delta = \pm 1$ . Wegen  $d, d' > 0$  muss sogar  $\alpha = \delta = 1$  gelten, so dass  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = T^\beta$ . Daraus folgt wiederum  $a = a', d = d'$  und  $b' = b + \beta d = b \pmod{d}$ , und wir sind fertig.  $\square$

### 3 Hecke-Operatoren

Wir erweitern den Slash-Operator auf Matrizen in  $\mathcal{M}_n$  durch

$$f|_k M = (c\tau + d)^{-k} f(M\tau)$$

für  $M \in \mathcal{M}_n$ .

**Definition 3.3.2.** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der Hecke-Operator  $T_n$  auf  $f \in M_k$  definiert als

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} f|_k M.$$

Da  $f$  invariant unter der Slash-Operation von  $\Gamma$  ist, hängt die Definition nicht von der Wahl des Repräsentantsystems für  $\Gamma \backslash \mathcal{M}_n$  ab. Mit dem Repräsentantensystem in Lemma 3.3.1 können wir ganz explizit schreiben:

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{-k} \sum_{b \pmod{d}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right). \quad (3.3.1)$$

Damit können wir die Wirkung von  $T_n$  auf der Fourierentwicklung berechnen.

**Lemma 3.3.3.** Für  $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_f(m)q^m \in M_k$  besitzt  $T_n f$  die Fourierentwicklung

$$T_n f = \sum_{m=0}^{\infty} a_{T_n f}(m)q^m, \quad a_{T_n f}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Insbesondere gilt

$$a_{T_n f}(0) = \sigma_{k-1}(n) a_f(0) \quad \text{und} \quad a_{T_n f}(1) = a_f(n).$$

*Beweis.* Wir setzen die Fourierentwicklung von  $f$  in (3.3.1) ein:

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{-k} \sum_{b \pmod{d}} \sum_{m=0}^{\infty} a_f(m) e^{2\pi i b m / d} e^{2\pi i a m \tau / d}.$$

Die Summe über  $b \pmod{d}$  verschwindet für  $d \nmid m$ , und für  $d \mid m$  ist sie gleich  $d$ . Wir erhalten mit  $m = dr$  daher

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} d^{1-k} \sum_{r=0}^{\infty} a_f(dr) e^{2\pi i a r \tau} = \sum_{a|n} a^{k-1} \sum_{r=0}^{\infty} a_f(rn/a) e^{2\pi i a r \tau}.$$

Setzen wir nun  $m = ar$ , so erhalten wir schließlich

$$T_n f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{a|(m,n)} a^{k-1} a_f(mn/a^2) e^{2\pi i m \tau},$$

und damit die behauptete Formel. □

Daraus erhalten wir den folgenden wichtigen Satz.

**Satz 3.3.4.** Für  $n \in \mathbb{N}$  definiert der Hecke-Operator  $T_n$  einen Endomorphismus von  $M_k$  und  $S_k$ .

*Beweis.* Ist  $L \in \Gamma$ , so gilt

$$T_n f|_k L = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} f|_k M L = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} f|_k M = T_n f,$$

da  $ML$  mit  $M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n$  ebenfalls ein Repräsentantensystem von  $\Gamma \backslash \mathcal{M}_n$  durchläuft. Aus der Fourierentwicklung von  $T_n f$  in Lemma 5.1.1 folgt, dass  $T_n f$  bei  $\infty$  holomorph ist, und bei  $\infty$  verschwindet falls  $f$  eine Spitzenform ist.  $\square$

Eine Modulform  $f \in M_k$  heißt *simultane Eigenform* aller Hecke-Operatoren  $T_n$ , falls

$$T_n f = \lambda_f(n) f$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit geeigneten Eigenwerten  $\lambda_f(n) \in \mathbb{C}$  gilt.

**Lemma 3.3.5.** *Für ein nicht-konstantes  $f \in M_k$  sind äquivalent:*

1.  $f$  ist eine simultane Eigenform aller  $T_n$ .
2. Es gilt  $a_f(1) \neq 0$  und für alle  $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$a_f(m) a_f(n) = a_f(1) \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f(mn/d^2).$$

In diesem Fall sind die Eigenwerte gegeben durch  $\lambda_f(n) = a_f(n)/a_f(1)$  und für  $(m, n) = 1$  gilt

$$a_f(m) a_f(n) = a_f(1) a_f(mn).$$

*Beweis.* Ist  $f$  eine simultane Eigenform aller  $T_n$ , so liefert ein Koeffizientenvergleich der  $m$ -ten Koeffizienten von  $\lambda_f(n) f$  und  $T_n f$  (siehe Lemma 5.1.1) die Gleichung

$$\lambda_f(n) a_f(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f(mn/d^2).$$

Für  $m = 1$  folgt daraus  $\lambda_f(n) a_f(1) = a_f(n)$ . Wäre  $a_f(1) = 0$ , so wäre  $a_f(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , im Widerspruch zur Annahme dass  $f$  nicht konstant ist. Damit ist  $a_f(1) \neq 0$  und  $\lambda_f(n) = a_f(n)/a_f(1)$ . Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so folgt

$$a_f(n) a_f(m) = a_f(1) \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f(mn/d^2).$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichung in 2. zusammen mit Lemma 5.1.1, dass  $T_n f = \frac{a_f(n)}{a_f(1)} f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, also ist  $f$  eine simultane Eigenform aller  $T_n$ .  $\square$

Ist  $f$  eine *normierte* simultane Eigenform, das heißt  $a_f(1) = 1$ , so sind die Koeffizienten von  $f$  nach dem letzten Lemma multiplikativ, erfüllen also

$$a_f(m) a_f(n) = a_f(mn)$$

für  $(m, n) = 1$ . Wir können damit nun zeigen, dass die Fourierkoeffizienten der  $\Delta$ -Funktion multiplikativ sind.

### 3 Hecke-Operatoren

**Satz 3.3.6.** Die  $\Delta$ -Funktion ist eine normierte Eigenform aller  $T_n$  mit

$$T_n \Delta = \tau(n) \Delta.$$

Für die Fourierkoeffizienten  $\tau(n)$  von  $\Delta$  gilt

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11} \tau(mn/d^2)$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere gilt

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$$

für  $(m, n) = 1$ .

*Beweis.* Da  $T_n$  ein Endomorphismus von  $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$  ist, ist  $T_n \Delta$  ein Vielfaches von  $\Delta$ , also  $T_n \Delta = \lambda_\Delta(n) \Delta$  für geeignete  $\lambda_\Delta(n) \in \mathbb{C}$ . Damit ist  $\Delta$  eine simultane Eigenform aller  $T_n$ . Außerdem ist  $\Delta$  normiert. Die Relationen für die  $\tau$ -Funktion folgen somit aus Lemma 3.3.5.  $\square$

**Satz 3.3.7.** Für gerade  $k \geq 4$  ist die Eisensteinreihe  $E_k$  eine simultane Eigenform aller  $T_n$  mit

$$T_n E_k = \sigma_{k-1}(n) E_k.$$

Es gelten die Relationen

$$\sigma_{k-1}(n)\sigma_{k-1}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \sigma_{k-1}(mn/d^2)$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist  $\sigma_{k-1}(n)$  multiplikativ.

*Beweis.* Wir setzen die Reihendarstellung von  $E_k$  in die Definition des Hecke-Operators  $T_n$  ein:

$$T_n E_k = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k L M = n^{k-1} \sum_{A \in \Gamma_\infty \backslash \mathcal{M}_n} 1|_k A.$$

Man kann nun zeigen, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} L : ad = n, d > 0, b \pmod{d}, L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma \right\}$$

ein Repräsentantensystem für  $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{M}_n$  ist. Dies überlassen wir dem Leser als Übung. Damit erhalten wir

$$T_n E_k = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} \sum_{b \pmod{d}} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1 \Big|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} L = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{1-k} \sum_{L \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k L = \sigma_{k-1}(n) E_k.$$

Mit  $E_k$  ist die Funktion  $-\frac{B_k}{2k} E_k$  eine normierte simultane Eigenform, deren  $n$ -ter Fourierkoeffizient gleich  $\sigma_{k-1}(n)$  ist. Die angegebenen Relationen der Teilersummenfunktionen folgen daher aus Lemma 3.3.5.  $\square$

**Bemerkung 3.3.8.** Man kann umgekehrt zeigen, dass jede simultane Eigenform aller  $T_n$ , die einen nicht-verschwindenden konstanten Koeffizienten hat, schon ein Vielfaches der Eisensteinreihe  $E_k$  ist.

Mit einem ähnlichen Beweis kann man die Wirkung von  $T_n$  auf Poincaréreihen berechnen.

**Satz 3.3.9.** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$T_n P_{m,k} = \sum_{d|(m,n)} (n/d)^{k-1} P_{mn/d^2,k}.$$

*Beweis.* Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe. □

### 3.4 Die Algebra der Hecke-Operatoren

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, dass die Hecke-Operatoren  $T_n$  Endomorphismen von  $M_k$  definieren. Es sei  $H_k$  die von den  $T_n$  aufgespannte Unter algebra aller Endomorphismen von  $M_k$ , also die Menge aller Polynome in den  $T_n$ . Wir nennen  $H_k$  die *Hecke-Algebra* vom Gewicht  $k$ . Wir wollen in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen.

**Satz 3.4.1.** Die Hecke-Algebra  $H_k$  ist eine kommutative Unter algebra von  $\text{End}(M_k)$ , die von allen  $T_p$  für Primzahlen  $p$  erzeugt wird. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten die Kompositionsregeln

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mn/d^2}.$$

Insbesondere gilt

$$T_m T_n = T_{mn}$$

für  $(m, n) = 1$ , und für jede Primzahl  $p$  und alle  $r \in \mathbb{N}$  gilt

$$T_{p^r} T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}.$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Bevor wir zum Beweis kommen, halten wir folgendes nützliches Korollar fest.

**Korollar 3.4.2.** Ist  $f \in M_k$  nicht konstant, so sind äquivalent:

1.  $f$  ist eine simultane Eigenform aller  $T_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $f$  ist eine simultane Eigenform aller  $T_p$  für Primzahlen  $p$ .
3. Für jede Primzahl  $p$  und alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$a_f(p) a_f(m) = a_f(1) (a_f(mp) + p^{k-1} a_f(m/p)),$$

wobei  $a_f(m/p) = 0$  für  $p \nmid m$ .

**Schritt 1: Multiplikatitivität der Hecke-Operatoren**

**Satz 3.4.3.** *Es gilt  $T_m T_n = T_{mn}$  für  $(m, n) = 1$ .*

Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma, dessen Beweis wir als Übungsaufgabe lassen.

**Lemma 3.4.4.** *Sind  $m, n \in \mathbb{N}$  teilerfremd, gilt  $a_1 d_1 = m, a_2 d_2 = n$  und durchlaufen  $b_1 \pmod{d_1}$  sowie  $b_2 \pmod{d_2}$  vollständige Restsysteme, dann durchläuft*

$$b_{12} = a_2 b_1 + b_2 d_1$$

*ein vollständiges Restsystem  $\pmod{d_1 d_2}$ .*

*Beweis von Satz 3.4.3.* Wir berechnen für  $f \in M_k$

$$\begin{aligned} T_m T_n f &= (mn)^{k-1} \sum_{a_1 d_1 = m} \sum_{a_2 d_2 = n} (d_1 d_2)^{-k} \sum_{b_1 \pmod{d_1}} \sum_{b_2 \pmod{d_2}} f\left(\frac{a_1 a_2 + b_{12}}{d_1 d_2}\right) \\ &= (mn)^{k-1} \sum_{ad=mn} d^{-k} \sum_{b \pmod{d}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) = T_{mn} f, \end{aligned}$$

wobei wir  $a = a_1 a_2, d = d_1 d_2$  und  $b = b_{12}$  gesetzt haben. □

**Schritt 2: Eine Rekursionsformel für  $T_{p^r}$**

**Satz 3.4.5.** *Für jede Primzahl  $p$  und alle  $r \in \mathbb{N}$  gilt*

$$T_{p^r} T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}.$$

Den Beweis des folgenden Lemmas lassen wir wieder als Übung.

**Lemma 3.4.6.** *1. Durchläuft  $b_\nu$  ein Restsystem  $\pmod{p^\nu}$  und  $a$  ein Restsystem  $\pmod{p}$ , so durchläuft*

$$c_\nu = b_\nu + ap^\nu$$

*ein Restsystem  $\pmod{p^{\nu+1}}$ .*

*2. Durchläuft  $b_\nu$  ein Restsystem  $\pmod{p^\nu}$ , so durchläuft  $b_\nu$  ein Restsystem  $\pmod{p^{\nu-1}}$  genau  $p$  mal.*

*Beweis von Satz 3.4.5.* Wir berechnen für  $f \in M_k$

$$\begin{aligned} T_{p^r} T_p f &= p^{r(k-1)} \sum_{\nu=0}^r p^{-\nu k} \sum_{b_\nu \pmod{p^\nu}} T_p f\left(\frac{p^{r-\nu}\tau + b_\nu}{p^\nu}\right) \\ &= p^{(r+1)(k-1)} f(p^{r+1}\tau) + p^{r(k-1)-1} \sum_{a \pmod{p}} f\left(\frac{p^r\tau + a}{p}\right) \\ &\quad + p^{r(k-1)} \sum_{\nu=1}^r p^{-\nu k} \sum_{b_\nu \pmod{p^\nu}} \left( p^{k-1} f\left(\frac{p^{r-\nu}\tau + b_\nu}{p^{\nu-1}}\right) + \frac{1}{p} \sum_{a \pmod{p}} f\left(\frac{p^{r-\nu}\tau + c_\nu}{p^{\nu+1}}\right) \right), \end{aligned}$$



wobei  $c_\nu = b_\nu + ap^\nu$ . Mit dem vorangegangenen Lemma ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T_{p^r} T_p f &= p^{(r+1)(k-1)} f(p^{r+1}\tau) \\
 &+ p^{r(k-1)} \sum_{\nu=1}^r p^{-(\nu-1)k} \sum_{b_\nu \pmod{p^{\nu-1}}} f\left(\frac{p^{(r-1)-(\nu-1)}\tau + b_\nu}{p^{\nu-1}}\right) \\
 &+ p^{r(k-1)} \sum_{\nu=0}^r p^{-\nu k-1} \sum_{c_\nu \pmod{p^{\nu+1}}} f\left(\frac{p^{(r+1)-(\nu+1)}\tau + c_\nu}{p^{\nu+1}}\right) \\
 &= p^{(r+1)(k-1)} f(p^{r+1}\tau) + p^{r(k-1)-(r-1)(k-1)} T_{p^{r-1}} f \\
 &+ p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\nu=0}^r p^{-(\nu+1)k} \sum_{c_\nu \pmod{p^{\nu+1}}} f\left(\frac{p^{(r+1)-(\nu+1)}\tau + c_\nu}{p^{\nu+1}}\right) \\
 &= p^{k-1} T_{p^{r-1}} f + T_{p^{r+1}} f.
 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes vollständig.  $\square$

**Korollar 3.4.7.** Für eine Primzahl  $p$  und  $r, s \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$T_{p^r} T_{p^s} = \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu}}.$$

*Beweis.* Dies zeigt man mithilfe des letzten Satzes per Induktion nach  $s$ . Wir behandeln den Beweis in den Übungen.  $\square$

### Der Beweis von Satz 3.4.1

Wegen der Multiplikatивität der Hecke-Operatoren (Satz 3.4.3) können wir

$$T_n = \prod_{p|n} T_{p^{\nu_p(n)}}$$

zerlegen, wobei  $\nu_p(n)$  die größte ganze Zahl ist, so dass  $p^{\nu_p(n)} \mid n$ . Aus Satz 3.4.5 folgt, dass man jedes  $T_{p^r}$  als Polynom in  $T_p$  schreiben kann. Somit kann man jedes  $T_n$  als Polynom in den  $T_p$  mit  $p$  prim schreiben. Da  $T_p$  und  $T_q$  für Primzahlen  $p, q$  nach Satz 3.4.3 kommutieren, ist die Hecke-Algebra kommutativ.

Wir beweisen die Formel im Satz per Induktion nach der Anzahl der Primteiler des Produkts  $mn$ . Hat  $mn$  nur einen Primteiler, also  $m = p^r$  und  $n = p^s$ , so ist die Formel aus dem Satz äquivalent zu Korollar 3.4.7. Wir nehmen nun an, dass  $mn$  mindestens zwei Primteiler hat. Sind  $mn$  teilerfremd, so ist die Formel aus dem Satz äquivalent zu Satz 3.4.3, und wir sind fertig. Wir können daher annehmen, dass es eine Primzahl  $p$  gibt, so dass

$$m = m'p^r, \quad n = n'p^s, \quad (m', p) = (n', p) = 1, \quad r, s \geq 1.$$

### 3 Hecke-Operatoren

Nach Induktionsvoraussetzung können wir schreiben

$$\begin{aligned}
T_m T_n &= T_{m'} T_{n'} T_{p^r} T_{p^s} \\
&= \sum_{t|(m',n')} t^{k-1} T_{m'n'/t^2} \sum_{\ell|(p^r,p^s)} \ell^{k-1} T_{p^r p^s / \ell^2} \\
&= \sum_{t|(m',n')} \sum_{\ell|(p^r,p^s)} (t\ell)^{k-1} T_{mn/(t\ell)^2} \\
&= \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mn/d^2},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass  $d = t\ell$  genau die gemeinsamen Teiler von  $m$  und  $n$  durchläuft.

## 3.5 Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren

**Satz 3.5.1.** Für  $f, g \in S_k$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle,$$

das heißt,  $T_n$  ist selbstadjungiert bzgl. des Petersson-Skalarprodukts.

*Beweis.* Wegen  $S_k = 0$  für  $k < 12$  und alle ungeraden  $k \in \mathbb{Z}$  können wir annehmen, dass  $k \geq 12$  gerade ist. Da der Raum  $S_k$  in diesem Fall von den Poincaréreihen  $P_{m,k}$  aufgespannt wird (siehe Satz 3.2.4), genügt es, die Behauptung für  $g = P_{m,k}$  zu zeigen. Wir berechnen mithilfe von Lemma 3.2.3, Lemma 5.1.1 und Satz 3.3.9:

$$\begin{aligned}
\langle T_n f, P_{m,k} \rangle &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_{T_n f}(m) \\
&= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f(mn/d^2) \\
&= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \frac{(4\pi mn/d^2)^{k-1}}{(k-2)!} \langle f, P_{mn/d^2} \rangle \\
&= \left\langle f, \sum_{d|(m,n)} (n/d)^{k-1} P_{mn/d^2, k} \right\rangle \\
&= \langle f, T_n P_{m,k} \rangle.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich eine Familie kommutierender selbstadjungierter Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen simultan diagonalisieren lassen, das heißt, dass es eine Basis gibt, die aus Eigenvektoren aller Operatoren besteht. Außerdem sind die Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Daraus erhalten wir:

**Satz 3.5.2.** Der Raum  $S_k$  besitzt eine Orthonormalbasis aus simultanen Eigenformen aller  $T_n$  mit reellen Fourierkoeffizienten.

### 3.5 Selbstdjungiertheit der Hecke-Operatoren

*Beweis.* Nach dem oben genannten Satz aus der linearen Algebra besitzt der Raum  $S_k$  eine Basis  $(f_j)$  aus simultanen Eigenformen aller  $T_n$  mit reellen Eigenwerten  $\lambda_{f_j}(n)$ . Wir können die  $f_j$  nach Lemma 3.3.5 zunächst als normierte simultane Eigenformen annehmen. Hätten zwei der Basiselemente  $f_i, f_j$  die gleichen Eigenwerte unter allen  $T_n$ , so würde aus Lemma 3.3.5 folgen, dass  $f_i = f_j$  gilt, was nicht sein kann. Da Eigenformen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, sind also alle  $f_j$  orthogonal zueinander. Wieder mit Lemma 3.3.5 erhalten wir, dass  $a_{f_j}(n) = \lambda_{f_j}(n)$  ist, so dass die Koeffizienten aller  $f_j$  reell sind. Teilen wir noch  $f_j$  durch die reelle Zahl  $\sqrt{\langle f_j, f_j \rangle}$ , so erhalten wir eine Orthonormalbasis von  $S_k$  bestehend aus simultanen Eigenformen aller  $T_n$  mit reellen Fourierkoeffizienten.  $\square$



## 4 $L$ -Funktionen

### 4.1 Dirichletreihen

Es sei  $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{C}$  eine Folge komplexer Zahlen. Die *Dirichletreihe* zu  $(a_n)$  ist die Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit  $s \in \mathbb{C}$ .

**Lemma 4.1.1.** *Gilt  $a_n = O(n^\alpha)$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so konvergiert  $L(s)$  absolut und lokal gleichmäßig für  $\operatorname{Re}(s) > \alpha + 1$  und definiert dort eine holomorphe Funktion.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es ein  $C > 0$  mit  $|a_n| \leq Cn^\alpha$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für eine kompakte Teilmenge  $K \subset \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \alpha + 1\}$  sei  $\sigma_0 = \min\{\operatorname{Re}(s) : s \in K\}$ . Dann gilt für  $s \in K$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\operatorname{Re}(s)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \sigma_0}.$$

Die letzte Reihe konvergiert, da  $\alpha - \sigma_0 < -1$  gilt. Die Holomorphie von  $L(s)$  folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz.  $\square$

Die kleinste reelle Zahl  $\sigma_0$  so dass  $L(s)$  für  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$  absolut konvergiert heißt (*absolute*) *Konvergenzabszisse* von  $L(s)$ .

#### Beispiel 4.1.2.

1. Die Riemannsche Zetafunktion  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  hat Konvergenzabszisse  $\sigma_0 = 1$ .
2. Die Dirichletreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) n^{-s}$  hat Konvergenzabszisse  $\sigma_0 = k$ .

Zur Untersuchung der meromorphen Fortsetzbarkeit einer Dirichletreihe ist die Mellin-Transformation hilfreich. Für  $\chi \in \mathbb{R}$  mit  $\chi \geq 0$  betrachten wir die folgende Menge von Funktionen

$$\mathcal{A}_\chi = \{g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig mit } g(y) = O(y^{-\sigma}) \text{ für alle } \sigma > \chi\}.$$

**Lemma 4.1.3.** *Für  $g \in \mathcal{A}_\chi$  und  $\operatorname{Re}(s) > \chi$  konvergiert die Mellin-Transformierte von  $g$*

$$M_g(s) = \int_0^\infty g(y) y^{s-1} dy$$

*und definiert dort eine holomorphe Funktion.*

#### 4 L-Funktionen

*Beweis.* Es sei  $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ . Für  $\chi < \alpha < \sigma < \beta$  gilt wegen  $g(y) \leq C_\alpha y^{-\alpha}$  und  $g(y) \leq C_\beta y^{-\beta}$ , dass

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g(y)y^{s-1}|dy &= \int_0^1 |g(y)y^{s-1}|dy + \int_1^\infty |g(y)y^{s-1}|dy \\ &\leq C_\alpha \int_0^1 y^{\sigma-\alpha-1}dy + C_\beta \int_1^\infty y^{\sigma-\beta-1}dy \\ &= C_\alpha \frac{1}{\sigma-\alpha} + C_\beta \frac{1}{\beta-\sigma}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Mellin-Transformierte von  $g$  in jedem Vertikalstreifen  $\{s \in \mathbb{C} : \alpha + \varepsilon \leq \sigma \leq \beta - \varepsilon\}$  für  $\varepsilon > 0$  absolut und gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt die Holomorphie von  $M_g(s)$ .  $\square$

**Beispiel 4.1.4.** Die Gammafunktion  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y}y^{s-1}dy$  ist die Mellin-Transformierte von  $g(y) = e^{-y} \in A_0$ .

Als Nächstes untersuchen wir die inverse Mellin-Transformation. Dazu bezeichne  $\mathcal{B}_\chi$  den Raum aller holomorphen Funktionen auf der Halbebene  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \chi\}$ , so dass es zu allen  $\alpha, \beta$  mit  $\chi < \alpha < \beta$  ein  $\gamma > 1$  und ein  $C > 0$  gibt mit der Eigenschaft

$$|f(s)| \leq C(1 + |t|)^{-\gamma} \text{ für } s = \sigma + it, \alpha \leq \sigma \leq \beta. \quad (4.1.1)$$

**Satz 4.1.5.** *Es sei  $f \in \mathcal{B}_\chi$  und  $\chi \geq 0, y > 0, \sigma > \chi$ . Dann konvergiert das längs der Geraden  $(\sigma) = \sigma + i\mathbb{R}$  erstreckte Integral*

$$f^*(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} f(s)y^{-s}ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\sigma + it)y^{-\sigma-it}dt$$

absolut und es gilt

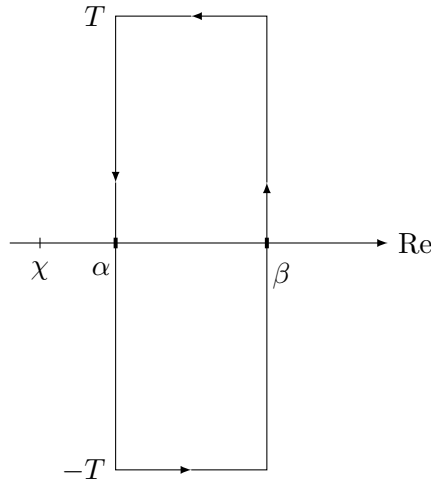
1.  $f^* \in \mathcal{A}_\chi$ .
2.  $f^*$  ist unabhängig von  $\sigma$  (solange  $\sigma > \chi$ ).
3. Für  $\operatorname{Re}(s) > \chi$  gilt  $f(s) = M_{f^*}(s)$ .

*Beweis.* Wegen der Abschätzung (4.1.1) können wir für  $\sigma > \chi$  ein  $\gamma > 1$  und ein  $C > 0$  finden so dass

$$\int_{-\infty}^\infty |f(\sigma + it)| \cdot |y^{-\sigma-it}|dt \leq 2Cy^{-\sigma} \int_0^\infty (1+t)^{-\gamma}dt = \frac{2C}{\gamma-1}y^{-\sigma}. \quad (4.1.2)$$

Damit ist das Integral absolut konvergent und stellt somit eine stetige Funktion auf  $(0, \infty)$  dar.

1. Die Stetigkeit von  $f^*$  zusammen mit der obigen Abschätzung zeigt  $f^* \in \mathcal{A}_\chi$ .
2. Für  $\alpha, \beta > \chi$  und  $T > 0$  betrachten wir folgenden Weg  $R_T$ :



Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{R_T} f(s)y^{-s} ds = 0.$$

Wegen (4.1.1) verschwinden die Integrale über die horizontalen Randstücke für  $T \rightarrow \infty$ . Daraus folgt

$$\int_{(\alpha)} f(s)y^{-s} ds = \int_{(\beta)} f(s)y^{-s} ds.$$

3. Aus Lemma 4.1.3 und Punkt 1. folgt, dass  $M_{f^*}(s_0)$  für  $\operatorname{Re}(s_0) > \chi$  existiert. Wegen der Unabhängigkeit vom Integrationsweg haben wir für  $\chi < \alpha < \sigma_0 = \operatorname{Re}(s_0) < \beta$

$$\begin{aligned} M_{f^*}(s_0) &= \int_0^\infty f^*(y)y^{s_0-1} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left( \int_{(\alpha)} f(s)y^{-s} ds \right) y^{s_0-1} dy + \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty \left( \int_{(\beta)} f(s)y^{-s} ds \right) y^{s_0-1} dy. \end{aligned}$$

Wegen (4.1.2) können wir in beiden Fälle die Integrale vertauschen und berechnen weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left( \int_0^1 y^{s_0-\alpha-it-1} dy \right) f(\alpha+it) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left( \int_1^\infty y^{s_0-\beta-it-1} dy \right) f(\beta+it) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\alpha+it)}{s_0 - (\alpha+it)} dt + \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\beta+it)}{\beta+it-s_0} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{(\beta)} \frac{f(z)}{z-s_0} dz - \int_{(\alpha)} \frac{f(z)}{z-s_0} dz \right). \end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz und der Abschätzung (4.1.1) erhalten wir

$$M_{f^*}(s_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{R_T} \frac{f(z)}{z-s_0} dz,$$

mit dem oben skizzierten Integrationsweg  $R_T$ . Wieder mit dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral unabhängig von  $T > 0$  und gleich  $f(s_0)$ , und der Beweis ist vollständig. □

## 4.2 Die *L*-Funktion einer Modulform

Es sei  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in M_k$  eine Modulform vom Gewicht  $k$ . Die *L*-Funktion von  $f$  ist die Dirichletreihe

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)n^{-s}$$

der Fourierkoeffizienten von  $f$ . In Satz 2.3.9 haben wir gesehen, dass  $a_f(n) = O(n^{k-1})$  gilt. Nach Lemma 4.1.1 konvergiert  $L_f(s)$  absolut und lokal gleichmäßig für  $\operatorname{Re}(s) > k$ . Wir zeigen nun zunächst die meromorphe Fortsetzung und die Funktionalgleichung von  $L_f(s)$ . Dazu definieren wir die *vervollständigte L-Funktion*

$$\Lambda_f(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

für  $\operatorname{Re}(s) > k$ .

**Satz 4.2.1.** *Es sei  $k \geq 4$  gerade und  $f \in M_k$ .*

1. *Die L-Funktion  $L_f(s)$  von  $f$  lässt sich meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen. Die Fortsetzung ist holomorph bis auf einen möglichen Pol bei  $s = k$  mit Residuum*

$$\operatorname{Res}_{s=k} L_f(s) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} a_f(0).$$

*Außerdem gilt  $L_f(0) = -a_f(0)$  und  $L_f(-n) = 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ .*

2. *Die Funktion*

$$\Lambda_f(s) - a_f(0) \left( \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right) = \int_1^{\infty} (f(iy) - a_f(0)) \cdot (y^s + i^k y^{k-s}) \frac{dy}{y}$$

*ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  und auf jedem Vertikalstreifen  $\{s \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re}(s) \leq \beta\}$  beschränkt.*

3. *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$\Lambda_f(k-s) = i^k \Lambda_f(s).$$

*Beweis.* Wir schreiben

$$\begin{aligned} \Lambda_f(s) &= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s) \\ &= (2\pi)^{-s} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)n^{-s} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{-2\pi ny} y^{s-1} dy \\ &= \int_0^{\infty} (f(iy) - a_f(0)) y^{s-1} dy. \end{aligned}$$



Wir bemerken an dieser Stelle, dass  $\Lambda_f(s)$  die Mellin-Transformierte der Funktion  $f(iy) - a_f(0)$  ist. Nun spalten wir das Integral bei  $y = 1$  auf, ersetzen  $y$  durch  $1/y$  im Integral  $\int_0^1$ , und benutzen die Modularität  $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_f(s) &= \int_1^\infty (f(iy) - a_f(0))y^{s-1} dy + \int_0^1 (f(iy) - a_f(0))y^{s-1} dy \\ &= \int_1^\infty (f(iy) - a_f(0))y^{s-1} dy + \int_1^\infty (f(i/y) - a_f(0))y^{-s-1} dy \\ &= \int_1^\infty (f(iy) - a_f(0))y^{s-1} dy + \int_1^\infty ((iy)^k f(iy) - a_f(0))y^{-s-1} dy \\ &= \int_1^\infty (f(iy) - a_f(0))(y^{s-1} + i^k y^{k-s-1}) dy + a_f(0) \int_1^\infty (i^k y^{k-s-1} - y^{-s-1}) dy \\ &= \int_1^\infty (f(iy) - a_f(0))(y^s + i^k y^{k-s}) \frac{dy}{y} + a_f(0) \left( \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

Es gilt  $f(iy) - a_f(0) = O(e^{-2\pi y})$  auf  $(1, \infty)$ , also ist das Integral eine ganze Funktion und in jedem Vertikalstreifen in  $\mathbb{C}$  beschränkt. Aus dieser Darstellung folgt, dass  $\Lambda_f(s)$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  fortsetzbar ist mit einfachen Polen bei  $s = k$  und  $s = 0$ , und dass  $\Lambda_f(s)$  die behauptete Funktionalgleichung besitzt. Da  $\Gamma(s)$  einen einfachen Pol bei  $s = 0$  mit Residuum 1 hat, gilt

$$L_f(0) = \text{Res}_{s=0} \Lambda_f(s) = -a_f(0).$$

Die Pole von  $\Gamma(s)$  bei  $s = -n, n \in \mathbb{N}$ , liefern Nullstellen von  $L_f(s)$ . Schließlich haben wir

$$\text{Res}_{s=k} L_f(s) = \frac{(2\pi)^k}{\Gamma(k)} \text{Res}_{s=k} \Lambda_f(s) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} a_f(0),$$

und der Beweis ist vollständig. □

Aus der Hecke bound  $a_f(n) = O(n^{k/2})$  für  $f \in S_k$  und  $a_f(0) = 0$  folgt:

**Korollar 4.2.2.** *Ist  $f \in S_k$  eine Spitzenform, so konvergiert  $L_f(s)$  absolut und lokal gleichmäßig für  $\text{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$  und lässt sich zu einer holomorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen.*

Umgekehrt besagt der *Heckesche Umkehrsatz*, dass jede  $L$ -Funktion mit den im Satz genannten Eigenschaften schon die  $L$ -Funktion einer Modulform ist.

**Satz 4.2.3** (Heckescher Umkehrsatz). *Es sei  $k \geq 4$  und*

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

*eine Dirichletreihe mit absoluter Konvergenzabszisse  $\sigma_0 < \infty$ . Wir nehmen an, dass  $L(s)$  folgende Eigenschaften hat:*

1. *Die Funktion*

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s)$$

*ist meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzbar.*

#### 4 L-Funktionen

2. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\Lambda(k-s) = i^k \Lambda(s).$$

3. Es gibt ein  $a_0 \in \mathbb{C}$  so dass die Funktion

$$\Lambda(s) - a_0 \left( \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right)$$

ganz und in jedem Vertikalstreifen in  $\mathbb{C}$  beschränkt ist.

Dann ist  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in M_k$  eine Modulform vom Gewicht  $k$  mit  $L$ -Reihe  $L_f(s) = L(s)$ .

*Beweis.* Es sei  $\chi = \max\{k, \sigma_0\}$  und  $\varepsilon > 0$ . Da die Reihe  $L(\chi + \varepsilon)$  nach Voraussetzung konvergiert, müssen die Koeffizienten beschränkt sein durch  $a_n = O(n^{\chi + \varepsilon - 1})$ . Damit konvergiert die Fourierreihe  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$  absolut und lokal gleichmäßig und stellt daher eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$  und bei  $\infty$  dar. Weiter gilt für  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma \geq \chi + \varepsilon$  die Abschätzung

$$|\Lambda(s)| \leq (2\pi)^{-\sigma} |\Gamma(s)| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = (2\pi)^{-(\chi + \varepsilon)} |\Gamma(s)| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-(\chi + \varepsilon)}.$$

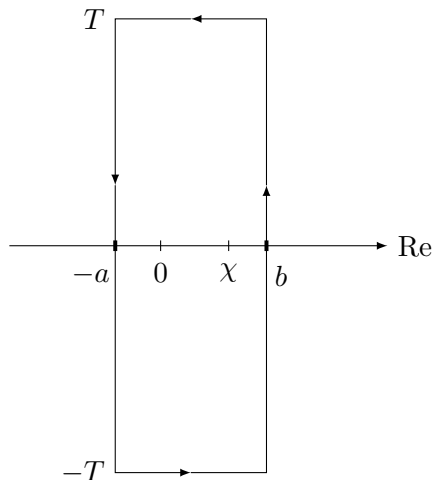
Wir zeigen in den Übungen, dass  $|\Gamma(s)| = O((1 + |t|)^{-2})$  gilt, woraus insgesamt  $\Lambda(s) \in \mathcal{B}_\chi$  folgt. Im Beweis von Satz 4.2.1 haben wir gesehen, dass  $\Lambda(s)$  die Mellin-Transformierte von  $f(iy) - a_0$  ist. Also folgt mit der Mellin-Umkehrformel in Satz 4.1.5, dass

$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \Lambda(s) y^{-s} ds \tag{4.2.1}$$

für  $\sigma > \chi$  gilt. Wir wollen damit nun zeigen, dass  $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$  für alle  $y > 0$  gilt, woraus dann mittels Identitätssatz die Modularität  $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$  folgt. Dazu betrachten wir das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_T} \Lambda(s) y^{-s} ds$$

wobei  $\gamma_T$  der positive orientierte Rand eines Rechtecks ist, das die Punkte 0 und  $\chi$  enthält.



## 4.2 Die L-Funktion einer Modulform

Aus dem Residuensatz und der Voraussetzung, dass die Funktion  $\Lambda(s) - a_0 \left( \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right)$  ganz ist, folgt

$$I = a_0((iy)^{-k} - 1).$$

Andererseits erhalten wir aus der Voraussetzung, dass  $\Lambda(s) - a_0 \left( \frac{i^k}{s-k} - \frac{1}{s} \right)$  in jedem Vertikalstreifen beschränkt ist, dass die Integrale über die vertikalen Randstücke von  $\gamma_T$  für  $T \rightarrow \infty$  verschwinden. Somit gilt

$$a_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \Lambda(s)y^{-s} = a_0(iy)^{-k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(-a)} \Lambda(s)y^{-s} ds.$$

Nach (4.2.1) ist die linke Seite gleich  $f(iy)$ . Auf der rechten Seite erhalten wir mit der Funktionalgleichung  $\Lambda(s-k) = i^k \Lambda(s)$  und (4.2.1)

$$a_0(iy)^{-k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(k+a)} i^k \Lambda(s)y^{s-k} ds = (iy)^{-k} f(i/y).$$

Dies zeigt  $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$  für alle  $y > 0$ . Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Eine zahlentheoretische Funktion  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *multiplikativ*, falls

$$\alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n)$$

für  $(m, n) = 1$  gilt.

**Lemma 4.2.4.** *Ist  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) \neq 0$  absolut konvergent, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) = \prod_p \left( \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(p^r) \right),$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen  $p$  läuft.

*Beweis.* Für jede multiplikative Funktion gilt  $\alpha(1) = 1$ . Für  $N > 0$  und die Primzahlen  $p_1, \dots, p_q \leq N$  gilt

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq N} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(p^r) \right) &= \sum_{r_1 \geq 0} \sum_{r_2 \geq 0} \cdots \sum_{r_q \geq 0} \alpha(p_1^{r_1}) \alpha(p_2^{r_2}) \cdots \alpha(p_q^{r_q}) \\ &= \sum_{r_1 \geq 0} \sum_{r_2 \geq 0} \cdots \sum_{r_q \geq 0} \alpha(p_1^{r_1} \cdots p_q^{r_q}) \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha(n) + \sum_{n \in E_N} \alpha(n) \end{aligned}$$

wobei

$$E_N = \{n \in \mathbb{N} : n > N, n \text{ hat höchstens } p_1, \dots, p_q \text{ als Primteiler}\}.$$

Daraus folgt

$$\left| \prod_{p \leq N} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(p^r) \right) - \sum_{n=1}^N \alpha(n) \right| \leq \sum_{n \in E_N} |\alpha(n)| \leq \sum_{n > N} |\alpha(n)|,$$

und somit das Lemma. □

#### 4 $L$ -Funktionen

**Beispiel 4.2.5.** Für die Riemannsche Zetafunktion erhält man mit dem Lemma die Darstellung als *Eulerprodukt*

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

für  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

Wir haben gesehen, dass die Fourierkoeffizienten simultaner Eigenformen aller Hecke-Operatoren  $T_n$  multiplikativ sind. Damit erhalten wir die folgende Darstellung der  $L$ -Funktion einer simultanen Eigenform als *Eulerprodukt*.

**Satz 4.2.6.** Ist  $f \in S_k$  mit  $a_f(1) = 1$  eine simultane Eigenform aller Hecke-Operatoren  $T_n$ , so lässt sich  $L_f(s)$  für  $\operatorname{Re}(s) > 1 + k/2$  als *Eulerprodukt*

$$L_f(s) = \prod_p (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}$$

entwickeln.

*Beweis.* Da die Fourierkoeffizienten von  $f$  multiplikativ sind, gilt nach dem letzten Lemma

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)n^{-s} = \prod_p \left( \sum_{r=0}^{\infty} a_f(p^r)p^{-rs} \right).$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} a_f(p^r)p^{-rs} \cdot (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a_f(p^r)p^{-rs} - \sum_{r=1}^{\infty} a_f(p^{r-1})a_f(p)p^{-rs} + \sum_{r=2}^{\infty} a_f(p^{r-2})p^{k-1-rs} \\ &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \left( a_f(p^r) - a_f(p^{r-1})a_f(p) + p^{k-1}a_f(p^{r-2}) \right) p^{-rs} = 1. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

**Bemerkung 4.2.7.** Für die  $L$ -Funktion der renormierten Eisensteinreihe  $-\frac{B_k}{2k}E_k$  gilt

$$\begin{aligned} L_{-\frac{B_k}{2k}E_k}(s) &= \zeta(s)\zeta(s+1-k) \\ &= \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}(1 - p^{k-s-1})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \sigma_{k-1}(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}, \end{aligned}$$

das heißt, der letzte Satz gilt analog auch für Eisensteinreihen.

### 4.3 Die Rankin- $L$ -Reihe zweier Spitzenformen

Wir folgen in diesem Abschnitt Zagiers Buch *Introduction to Modular Forms*.

### 4.3 Die Rankin-L-Reihe zweier Spitzenformen

**Definition 4.3.1.** Für  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  definieren wir die *nicht-holomorphe Eisensteinreihe*

$$G(\tau, s) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{y^s}{|m\tau + n|^{2s}}.$$

Mit denselben Argumenten wie im Beweis der Konvergenz von  $G_k(\tau)$  mit  $k \geq 4$  sieht man ein, dass  $G(\tau, s)$  für  $\operatorname{Re}(s) > 1$  absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist  $G(\tau, s)$  für  $\operatorname{Re}(s) > 1$  als Funktion von  $\tau$  glatt auf  $\mathbb{H}$  und  $\Gamma$ -invariant. Wir definieren die vervollständigte Eisensteinreihe

$$G^*(\tau, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) G(\tau, s).$$

**Bemerkung 4.3.2.** Es sei  $Q(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  eine positiv definite quadratische Form, das heißt  $Q(m, n) \geq 0$  für alle  $m, n \in \mathbb{R}$  und  $Q(m, n) = 0$  nur für  $(m, n) = 0$ . Die zugeordnete *Epsteinsche Zetafunktion* ist für  $\operatorname{Re}(s) > 1$  definiert als

$$\zeta_Q(s) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} Q(m, n)^{-s}.$$

Mit der quadratischen Form

$$Q_\tau(m, n) = y^{-1} |m\tau + n|^2$$

gilt

$$\zeta_{Q_\tau}(s) = 2G(\tau, s),$$

das heißt, die nicht-holomorphe Eisensteinreihe  $G(\tau, s)$  ist für festes  $\tau \in \mathbb{H}$  eine Art Dirichletreihe.

**Bemerkung 4.3.3.** Die nicht-holomorphe Eisensteinreihe  $G(\tau, s)$  ist eine Eigenfunktion des invarianten Laplace-Operators

$$\Delta_0 = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$\Delta_0 G(\tau, s) = s(1-s)G(\tau, s).$$

Wir berechnen nun zunächst die Fourierentwicklung von  $G(\tau, s)$ .

**Lemma 4.3.4.** Für  $\operatorname{Re}(s) > 1$  und  $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$  haben wir die Fourierentwicklung

$$\begin{aligned} G(\tau, s) &= \zeta(2s)y^s + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} y^{1-s} \zeta(2s-1) \\ &\quad + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sqrt{y} \sum_{n \neq 0} |n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|) K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}, \end{aligned}$$

wobei  $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$  für  $s \in \mathbb{C}$  die verallgemeinerte Teilersummenfunktion und  $K_\nu(t) = \int_0^\infty e^{-t \cosh u} \cosh(\nu u) du$  die  $K$ -Besselfunktion ist.

#### 4 L-Funktionen

*Beweis.* Wir spalten die Terme mit  $m = 0$  ab und schreiben

$$G(\tau, s) = \zeta(2s)y^s + y^s \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |m\tau + n|^{-2s} \right).$$

Für  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $\operatorname{Re}(s) > 1$  gilt die *Lipschitzformel*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tau + n|^{-2s} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} y^{1-2s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} y^{1/2-s} \sum_{r \neq 0} |r|^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi|r|y) e^{2\pi i r x}.$$

Der Beweis dieser Formel beruht auf der Poissonschen Summenformel und findet sich im Buch von Zagier. Damit erhalten wir die behauptete Formel.  $\square$

**Bemerkung 4.3.5.** Die  $K$ -Besselfunktion  $K_\nu(t)$  ist eine Lösung der modifizierten Besselschen Differentialgleichung

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} f + t \frac{d}{dt} f - (t^2 + \nu^2) f = 0.$$

Als Funktion von  $\nu \in \mathbb{C}$  ist  $K_\nu(t)$  holomorph und erfüllt  $K_{-\nu}(t) = K_\nu(t)$ . Als Funktion von  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  ist  $K_\nu(t)$  glatt und klingt exponentiell ab für  $t \rightarrow \infty$ . Für  $\nu = 1/2$  haben wir  $K_{1/2}(t) = \sqrt{\pi/2t} e^{-t}$ .

Die vervollständigte nicht-holomorphe Eisensteinreihe hat die Fourierentwicklung

$$G^*(\tau, s) = \xi(2s)y^s + \xi(2s-1)y^{1-s} + 2\sqrt{y} \sum_{n \neq 0} |n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|) K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}, \quad (4.3.1)$$

mit der vervollständigten Riemannschen Zetafunktion  $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ . Damit erhalten wir die meromorphe Fortsetzung von  $G^*(\tau, s)$ .

**Satz 4.3.6.** Die Funktion  $G^*(\tau, s)$  besitzt eine meromorphe Fortsetzung in  $s$  nach ganz  $\mathbb{C}$  mit einfachen Polen bei  $s = 0$  und  $s = 1$  mit Residuen  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$ , und erfüllt die Funktionalgleichung

$$G^*(\tau, 1-s) = G^*(\tau, s).$$

*Beweis.* Die Fourierreihe (4.3.1) von  $G^*(\tau, s)$  konvergiert absolut und lokal gleichmäßig für  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Die Riemannsche Zetafunktion  $\xi(s)$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  bis auf einfache Pole bei  $s = 0$  und  $s = 1$  mit Residuen  $-1$  und  $1$ , und die Funktion  $|n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|) K_\nu(2\pi|n|y)$  ist holomorph in  $s$  auf ganz  $\mathbb{C}$ . Die Pole von  $\zeta(2s)$  und  $\zeta(2s-1)$  bei  $s = 1/2$  heben sich gegenseitig auf. Daher definiert die Fourierreihe eine meromorphe Fortsetzung von  $G^*(\tau, s)$  mit einfachen Polen bei  $s = 0$  und  $s = 1$  mit Residuen  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$ .

Aus der Funktionalgleichung  $\xi(1-s) = \xi(s)$  und  $K_{-\nu}(t) = K_\nu(t)$ , sowie der Invarianz von  $s \mapsto |n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|)$  unter  $s \mapsto 1-s$ , erhalten wir die Funktionalgleichung von  $G^*(\tau, s)$ .  $\square$

Aus der Fourierentwicklung erhalten wir außerdem die sogenannte *Kroneckersche Grenzformel*, die einen überraschenden Zusammenhang zwischen der nicht-holomorphen Eisensteinreihe  $G^*(\tau, s)$  und der Ramanujan  $\Delta$ -Funktion herstellt.

### 4.3 Die Rankin-L-Reihe zweier Spitzenformen

**Satz 4.3.7** (Kroneckersche Grenzformel). *Die vervollständigte nicht-holomorphe Eisensteinreihe hat bei  $s = 1$  die Laurententwicklung*

$$G^*(\tau, s) = \frac{1}{2}(s-1)^{-1} - \frac{1}{12} \log(y^6 |\Delta(\tau)|) + C + O(s-1)$$

mit der Konstante  $C = \lim_{s \rightarrow 1} (\xi(s) - (s-1)^{-1})$ .

*Beweis.* Da  $G^*(\tau, s)$  einen einfachen Pol bei  $s = 1$  mit Residuum  $\frac{1}{2}$  hat, beginnt die Laurententwicklung mit  $\frac{1}{2}(s-1)^{-1}$ . Der konstante Term in der Laurententwicklung von  $G^*(\tau, s)$  bei  $s = 1$  ist wegen  $K_{1/2}(t) = \sqrt{\pi/2} t e^{-t}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} & \xi^*(2)y - \text{Res}_{s=1} \xi(2s-1) \log(y) + C + 2\sqrt{y} \sum_{n \neq 0} \sqrt{|n|} \sigma_{-1}(|n|) K_{1/2}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x} \\ &= \frac{\pi}{6} y - \frac{1}{2} \log(y) + C + \sum_{n \neq 0} \sigma_{-1}(|n|) e^{-2\pi|n|y} e^{2\pi i n x} \\ &= \frac{\pi}{6} y - \frac{1}{2} \log(y) + C + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-1}(n) e^{-2\pi n y} (e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x}) \\ &= \frac{\pi}{6} y - \frac{1}{2} \log(y) + C + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-1}(n) \text{Re}(e^{2\pi i n \tau}) \\ &= \frac{\pi}{6} y - \frac{1}{2} \log(y) + C + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{Re}(e^{2\pi i m r \tau}) \\ &= \frac{\pi}{6} y - \frac{1}{2} \log(y) + C - \sum_{r=1}^{\infty} \log |1 - e^{2\pi i r \tau}|^2 \\ &= -\frac{1}{12} \log(y^6 |\Delta(\tau)|) + C. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Mithilfe der nicht-holomorphen Eisensteinreihe kann man außerdem die meromorphe Fortsetzung der sogenannten Rankin-L-Funktion zweier Spitzenformen  $f, g \in S_k$  beweisen.

**Definition 4.3.8.** Für  $f, g \in S_k$  und  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re}(s) > 1$  ist die *Rankin-L-Funktion* von  $f$  und  $g$  definiert durch

$$L_{f,g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \overline{a_g(n)} n^{-s-k+1}.$$

Wegen  $a_f(n), a_g(n) = O(n^{k/2})$  ist  $L_{f,g}(s)$  holomorph für  $\text{Re}(s) > 2$ . Wir definieren noch die vervollständigte Rankin-L-Funktion durch

$$\Lambda_{f,g}(s) = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \xi(2s) L_{f,g}(s).$$

**Lemma 4.3.9.** *Für  $f, g \in S_k$  und  $\text{Re}(s) > 2$  gilt*

$$\langle G^*(\cdot, s) f, g \rangle = \Lambda_{f,g}(s).$$

#### 4 L-Funktionen

*Beweis.* Wir können  $G(\tau, s)$  schreiben als

$$G(\tau, s) = \zeta(2s) \sum_{M \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} y^s |_0 M.$$

Mittels Entfaltungstrick berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle fG(\cdot, s), g \rangle &= \zeta(2s) \int_0^\infty \int_0^1 f(\tau) \overline{g(\tau)} dx y^{s+k-2} dy \\ &= \zeta(2s) \sum_{m,n=1}^\infty a_f(m) \overline{a_g(n)} \int_0^\infty e^{2\pi i n \tau} e^{-2\pi i m \bar{\tau}} dx y^{s+k-2} dy \\ &= \zeta(2s) \sum_{n=1}^\infty a_f(n) \overline{a_g(n)} \int_0^\infty e^{-4\pi n y} y^{s+k-2} dy \\ &= \zeta(2s) \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^\infty a_f(n) \overline{a_g(n)} n^{-s-k+1}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $\pi^{-s} \Gamma(s)$  auf beiden Seiten folgt die Behauptung.  $\square$

Daraus erhalten wir die meromorphe Fortsetzung von  $\Lambda_{f,g}(s)$ .

**Satz 4.3.10.** Die vervollständigte Rankin-L-Funktion  $\Lambda_{f,g}(s)$  besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach  $\mathbb{C}$  mit einfachen Polen bei  $s = 0$  und  $s = 1$  mit Residuen  $-\frac{1}{2} \langle f, g \rangle$  und  $\frac{1}{2} \langle f, g \rangle$ , und es gilt die Funktionalgleichung

$$\Lambda_{f,g}(1-s) = \Lambda_{f,g}(s).$$

*Beweis.* Der Satz folgt sofort aus dem letzten Lemma und den Eigenschaften von  $G^*(\tau, s)$  aus Satz 4.3.6.  $\square$

**Bemerkung 4.3.11.** Sind  $f, g$  simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren, so besitzt  $L_{f,g}(s)$  eine Darstellung als Eulerprodukt. Wir leiten das Eulerprodukt in den Übungen her.



## 5 Die singulären Werte der $j$ -Funktion

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass die Werte der  $j$ -Funktion bei imaginär-quadratischen Punkten  $\tau \in \mathbb{H}$  algebraische Zahlen sind. Man nennt diese Zahlen die singulären Werte der  $j$ -Funktion. Anschließend präsentieren wir ein Resultat von Zagier, das besagt, dass die erzeugende Reihe gewisser endlicher Summen singulärer Werte von  $j$  eine schwach holomorphe Modulform vom Gewicht  $3/2$  darstellt.

### 5.1 Das modulare Polynom

Wir erweitern zunächst die Definition des Hecke-Operators  $T_n$  auf modulare Funktionen  $f$  durch

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} f|_0 M.$$

Eine analoge Rechnung wie für holomorphe Modulformen zeigt:

**Lemma 5.1.1.** *Für eine modulare Funktion  $f = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_f(m)q^m$  besitzt  $T_n f$  die Fourierentwicklung*

$$T_n f = \sum_{m=nm_0}^{\infty} a_{T_n f}(m)q^m, \quad a_{T_n f}(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_f\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

**Beispiel 5.1.2.** Wir haben gesehen, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}_0$  eine eindeutige modulare Funktion  $j_n$  gibt mit Fourierentwicklung  $j_n = q^{-n} + O(q)$ . Anhand der Wirkung von  $T_n$  auf der Fourierentwicklung erhalten wir

$$T_n j_1 = n^{k-1} j_n.$$

Außerdem sehen wir, dass  $T_n j^k \in \mathbb{Q}[j]$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  ein rationales Polynom in  $j$  ist, woraus  $T_n \mathbb{Q}[j] \subset \mathbb{Q}[j]$  folgt.

**Satz 5.1.3.** *Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom  $F_n(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$  mit der Eigenschaft*

$$F_n(X, j(\tau)) = \prod_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} (X - j(M\tau))$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ .  $F_n(X, Y)$  hat Grad  $\sigma_1(n)$  in  $X$  und  $Y$ .

*Beweis.* Es sei

$$F_n(X) = \prod_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} (X - j(M\tau))$$

## 5 Die singulären Werte der $j$ -Funktion

das Polynom auf der rechten Seite. Beachte zunächst, dass  $F_n(X)$  wohldefiniert ist, da  $j$  invariant unter  $\Gamma$  ist. Setze  $r = \sigma_1(n) = |\Gamma \backslash \mathcal{M}_n|$ . Es sei  $M_1, \dots, M_r$  das Standardrepräsentantensystem für  $\Gamma \backslash \mathcal{M}_n$ . Ausmultiplizieren der rechten Seite liefert

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^r (-1)^k e_k(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau)) X^{r-k},$$

wobei

$$e_k(X_1, \dots, X_r) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq r} X_{j_1} \cdots X_{j_k}$$

das  $k$ -te elementarsymmetrische Polynom in  $r$  Variablen ist. Man kann  $e_k$  als rationales Polynom in den Potenzsummen

$$s_m(X_1, \dots, X_r) = X_1^m + \dots + X_r^m$$

schreiben. Nun gilt

$$s_m(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau)) = \sum_{k=1}^r j(M_k\tau)^m = (nT_n(j^m))(\tau) \in \mathbb{Q}[j(\tau)]$$

und somit auch

$$e_k(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau)) \in \mathbb{Q}[j(\tau)],$$

also  $e_k(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau)) = p_k(j(\tau))$  für ein Polynom  $p_k(Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ . Somit ist

$$F_n(X, Y) = \sum_{k=0}^r (-1)^k p_k(Y) X^{r-k}$$

das gesuchte Polynom.

Gäbe es ein weiteres Polynom  $\tilde{F}_n(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$  mit  $\tilde{F}_n(X, j(\tau)) = F_n(X, j(\tau))$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  und alle  $X$ , aber  $\tilde{F}_n(X_0, Y) \neq F_n(X_0, Y)$  für ein  $X_0 \in \mathbb{Q}$ , so wäre die Differenz  $\tilde{F}_n(X_0, Y) - F_n(X_0, Y) \in \mathbb{Q}[Y]$  ein nicht-triviales rationales Polynom, das  $j(\tau)$  als Nullstelle hat. Damit wäre  $j(\tau)$  für jedes  $\tau$  algebraisch. Da  $j(\tau)$  aber für  $\tau \in \mathbb{H}$  jeden komplexen Wert annimmt, kann das nicht sein. Somit ist  $F_n(X, Y)$  eindeutig.

Wegen  $e_0 = p_0 = 1$  hat  $F_n(X, Y)$  in  $X$  Grad  $r$ . Beachte, dass die Fourierentwicklung von  $e_r(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau))$  bei  $\infty$  mit

$$\prod_{d|n} \prod_{b \pmod{d}} e^{-2\pi i \frac{a\tau+b}{d}} = \pm e^{-2\pi i r\tau}$$

beginnt. Ähnlich sieht man, dass die Polordnung bei  $\infty$  der Polynome  $e_k(j(M_1\tau), \dots, j(M_r\tau))$  für  $1 \leq k < r$  kleiner als  $r$  ist. Damit hat  $p_r(Y)$  Grad  $r$ , und alle  $p_k$  mit  $1 \leq k < r$  haben einen Grad kleiner als  $r$ . Somit hat  $F_n(X, Y)$  Grad  $r$  in  $Y$ .  $\square$

Das Polynom  $F_n(X, Y)$  heißt das  $n$ -te *modulare Polynom*. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} F_1(X, Y) &= X - Y, \\ F_2(X, Y) &= X^3 + Y^3 - X^2Y^2 + 1.488(X^2Y + XY^2) - 162.000(X^2 + Y^2) \\ &\quad + 40.773.375XY + 8.748.000.000(X + Y) - 157.464.000.000.000. \end{aligned}$$

**Lemma 5.1.4.** *Ist  $n \in \mathbb{N}$  quadratfrei, so gibt es zu  $M \in \mathcal{M}_n$  Matrizen  $K, L \in \Gamma$  mit  $KML = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ .*

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen, dass wir durch Multiplikation von links mit einer Matrix in  $\Gamma$  annehmen können, dass  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  mit  $ad = n$  gilt. Weil  $n$  quadratfrei ist, sind  $a$  und  $d$  teilerfremd. Es existiert dann ein  $x \in \mathbb{Z}$ , so dass  $xa + b$  und  $d$  teilerfremd sind. Wähle  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha(xa + b) + \beta d = 1$  und setze

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -d & xa + b \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Wir schreiben nun  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(j)$  für den Körper der modularen Funktionen.

**Satz 5.1.5.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  quadratfrei. Dann ist*

$$F_n(X, j) \in \mathbb{K}[X]$$

*irreduzibel. Es gilt*

$$F_n(X, Y) = F_n(Y, X) \quad \text{und} \quad F_n(X, X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}.$$

*Beweis.* Es sei

$$\mathbb{K}' = \mathbb{K}[j(M\tau) : M \in \Gamma \setminus \mathcal{M}_n]$$

der Zerfällungskörper von  $F_n(X, j)$  über  $\mathbb{K}$ . Für festes  $L \in \Gamma$  permutiert die Abbildung  $j(M\tau) \mapsto j(ML\tau)$  die Werte  $j(M\tau)$  für  $M \in \Gamma \setminus \mathcal{M}_n$  und definiert daher einen Automorphismus von  $\mathbb{K}'$ . Zu  $M \in \mathcal{M}_n$  wählen wir  $K, L \in \Gamma$  wie im Lemma und erhalten

$$j(M\tau) = j((L^{-1}\tau)/n).$$

Daher entstehen die Nullstellen  $X = j(M\tau), M \in \Gamma \setminus \mathcal{M}_n$ , des Polynoms  $F_n(X, j)$  aus der speziellen Nullstelle  $X = j(\tau/n)$  durch Anwendung von Automorphismen von  $\mathbb{K}'$  über  $\mathbb{K}$ . Dies impliziert, dass  $F_n(X, j)$  irreduzibel über  $\mathbb{K}$  ist.

Wegen  $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$  gilt

$$F_n(j(n\tau), j(\tau)) = 0$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Ersetzen wir  $\tau$  mit  $\tau/n$ , so gilt also auch

$$F_n(j(\tau), j(\tau/n)) = 0$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$ . Also hat das Polynom  $F_n(j(\tau), Y) \in \mathbb{K}[Y]$  die Nullstelle  $Y = j(\tau/n)$ . Andererseits hat auch das Polynom  $F_n(Y, j)$  die Nullstelle  $Y = j(\tau/n)$  und ist irreduzibel, und muss daher ebenfalls  $F_n(j(\tau), Y)$  teilen. Da beide Polynome denselben Grad haben, folgt

$$F_n(j(\tau), Y) = cF_n(Y, j(\tau))$$

für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  und ein  $c \in \mathbb{Q}$ . Da  $j(\tau)$  jeden komplexen Wert annimmt, folgt

$$F_n(X, Y) = cF_n(Y, X).$$

Aus Symmetriegründen muss  $c = \pm 1$  sein. Wäre  $c = -1$ , so wäre  $F_n(X, X) = 0$ , also wäre  $F_n(X, j)$  durch  $X - j$  teilbar, was wegen  $\sigma_1(n) > 1$  der Irreduzibilität von  $F_n(X, j)$  widerspricht. Daraus erhält man  $c = 1$  und  $F_n(X, X) \neq 0$ . □

## 5 Die singulären Werte der $j$ -Funktion

**Satz 5.1.6.** *Gehört  $\tau \in \mathbb{H}$  zu einem imaginär-quadratischen Zahlkörper, so ist  $j(\tau)$  algebraisch.*

*Beweis.* Liegt  $\tau \in \mathbb{H}$  in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper, so hat  $\tau$  eine Darstellung

$$\tau = \frac{1}{d}(b + ia\sqrt{D}), \quad b \in \mathbb{Z}, \quad a, d, D \in \mathbb{N}, \quad D \text{ quadratfrei.}$$

Wir zeigen zunächst, dass der Wert  $j(i\sqrt{D})$  algebraisch ist. Beachte dazu, dass

$$\frac{i\sqrt{D}}{D} = \frac{i}{\sqrt{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} i\sqrt{D}$$

gilt, das heißt,  $\frac{i\sqrt{D}}{D}$  und  $i\sqrt{D}$  sind äquivalent mod  $\Gamma$ , so dass  $j(i\sqrt{D}/D) = j(i\sqrt{D})$ . Wir haben also

$$F_D(j(i\sqrt{D}), j(i\sqrt{D})) = F_D(j(i\sqrt{D}/D), j(i\sqrt{D})) = 0$$

nach dem letzten Satz, das heißt,  $j(i\sqrt{D})$  ist Nullstelle des Polynoms  $F_D(X, X) \neq 0$ , und somit algebraisch.

Wir setzen nun  $n = ad$ , so dass die Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  in  $\mathcal{M}_n$  liegt. Außerdem gilt  $Mi\sqrt{D} = \tau$ . Daher folgt

$$F_n(j(\tau), j(i\sqrt{D})) = F_n(j(Mi\sqrt{D}), j(i\sqrt{D})) = 0$$

nach Definition von  $F_n$ . Somit ist  $j(\tau)$  algebraisch über  $\mathbb{Q}(j(i\sqrt{D}))$ , und damit auch algebraisch über  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Bemerkung 5.1.7.** Man nennt die algebraischen Zahlen  $j(\tau)$  für  $\tau$  in imaginär-quadratischen Zahlkörpern die *singulären Werte von  $j$* . Liegt  $\tau$  im imaginär-quadratischen Zahlkörper  $K$ , so kann man zeigen, dass die Erweiterung  $K(j(\tau))$  eine endliche abelsche Erweiterung von  $K$  ist.

## 5.2 Die erzeugende Reihe der Spuren der singulären Werte

Wir geben in diesem Abschnitt einen wichtigen Satz von Zagier über die Modularität der Spuren der singulären Werte von  $j$  an. Damit wollen wir einen Ausblick auf ein weiterführendes Thema geben, und lassen daher einige Details aus. Für die vollständigen Beweise verweisen wir auf Zagiers Arbeit ‘Traces of singular moduli’.

### 5.2.1 Binäre quadratische Formen

Bevor wir Zagiers Satz formulieren können, benötigen wir noch etwas Notation.

Eine (*ganzzahlige binäre*) *quadratische Form* ist ein Polynom der Form

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Wir schreiben kurz  $Q = [a, b, c]$ . Die *Diskriminante* von  $Q$  ist die Zahl  $-d = b^2 - 4ac$ . Wir nehmen im Folgenden stets an, dass  $d > 0$  ist. Eine quadratische Form  $Q$  heißt *positiv definit*, falls  $Q(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt, und  $Q(x, y) = 0$  nur für  $(x, y) = (0, 0)$ . Beachte, dass  $Q$  genau dann positiv definit ist, wenn die Diskriminante von  $Q$  negativ ist und  $a > 0$  gilt. Wir schreiben

$$\mathcal{Q}_d = \{[a, b, c] : a, b, c \in \mathbb{Z}, a > 0, b^2 - 4ac = -d\}$$

## 5.2 Die erzeugende Reihe der Spuren der singulären Werte

für die Menge aller positiv definiten quadratischen Formen der Diskriminante  $-d < 0$ . Beachte, dass  $\mathcal{Q}_d \neq \emptyset$  nur für  $d \equiv 0, 3 \pmod{4}$  gilt. Die Gruppe  $\Gamma$  operiert auf  $\mathcal{Q}_d$  durch

$$\left( Q \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) (x, y) = Q(ax + by, cx + dy).$$

Man kann zeigen, dass der Quotient  $\mathcal{Q}_d/\Gamma$  endlich ist.

Für  $Q = [a, b, c] \in \mathcal{Q}_d$  besitzt die Gleichung  $Q(z, 1) = 0$  eine eindeutige Lösung in  $\mathbb{H}$ , die wir den *CM-Punkt*  $\tau_Q$  zu  $Q$  nennen. Er ist gegeben durch

$$\tau_Q = \frac{-b + i\sqrt{d}}{2a}.$$

Es sei

$$w_Q = \frac{1}{2} |\Gamma_{\tau_Q}| = \begin{cases} 3, & \text{falls } \tau_Q \text{ äquivalent zu } \rho \text{ ist,} \\ 2, & \text{falls } \tau_Q \text{ äquivalent zu } i \text{ ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine  $\Gamma$ -invariante Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die *d-te Spur* von  $f$  durch

$$\text{tr}_f(d) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{f(\tau_Q)}{w_Q}.$$

Beachte, dass dies wohldefiniert ist, da  $f$   $\Gamma$ -invariant ist. Außerdem ist die Summe endlich.

Für  $f = 1$  erhalten wir die *Hurwitz-Klassenzahlen*

$$H(d) = \text{tr}_1(d) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{1}{w_Q}.$$

Wir haben zum Beispiel:

$d$	3	4	7	8	11	12	15
$H(d)$	1/3	1/2	1	1	1	4/3	2

### 5.2.2 Die Modularität der Spuren von $J$

Wir setzen  $J = j - 744$ . Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die Spuren von  $J$  algebraische Zahlen sind. Man kann mit etwas mehr Aufwand sogar zeigen, dass die Spuren von  $J$  *ganzzahlig* sind. Wir haben zum Beispiel die folgenden Werte:

$d$	3	4	7	8	11	12	15
$\text{tr}_J(d)$	-248	492	-4119	7256	-33512	53008	-192513

Wir wollen in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen

**Satz 5.2.1** (Zagier). *Die erzeugende Reihe*

$$f(\tau) = q^{-1} - 2 - \sum_{d>0} \text{tr}_J(d) q^d$$

der Spuren von  $J = j - 744$  ist eine schwach holomorphe Modulform vom Gewicht  $3/2$  für  $\Gamma_0(4)$ .

## 5 Die singulären Werte der $j$ -Funktion

Dabei bedeutet *schwach holomorph*, dass  $f(\tau)$  Pole an den Spitzen haben darf. Die Modularität bedeutet, dass

$$f(M\tau) = \nu_{\vartheta}(M)^3 (c\tau + d)^{3/2} f(\tau)$$

für  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$  gilt, wobei  $\nu_{\vartheta}(M)$  der *Thetamultiplikator* aus der Transformationsregel

$$\vartheta(M\tau) = \nu_{\vartheta}(M)(c\tau + d)^{1/2} \vartheta(\tau)$$

der Jacobischen Thetafunktion ist.

Zum Beweis des Satzes betrachten wir die Modulform

$$g(\tau) = \theta_1(\tau) \frac{E_4(4\tau)}{\eta(4\tau)^6} = \sum_{d \geq -1} B(d)q^d = q^{-1} - 2 + 248q^3 - 492q^4 + 4119q^7 \dots$$

vom Gewicht  $3/2$  für  $\Gamma_0(4)$ . Dabei ist  $\theta_1(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2}$  eine Modulform vom Gewicht  $1/2$ , wie man mittels Poissonscher Summenformel zeigt. Wir haben:

**Satz 5.2.2.** *Für alle  $d > 0$  gilt  $\text{tr}_J(d) = -B(d)$ .*

Wir zeigen diesen Satz, indem wir zuerst eine Rekursion für  $-B(d)$  herleiten, und dann dieselbe Rekursion für  $\text{tr}_J(d)$  beweisen. Da  $g(\tau)$  per Konstruktion modular ist, folgt aus dem Satz dann auch die Modularität von  $f(\tau)$ .

### 5.2.3 Eine Rekursion für $\text{tr}_J(d)$

Wir leiten zunächst eine Rekursion für die  $B(d)$  her.

1. Die Funktion  $U_4(g(\tau)\vartheta(\tau))$ , mit dem Operator  $U_4(\sum a_n q^n) = \sum a_{4n} q^n$ , ist eine Modulform vom Gewicht 2 zu  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , und verschwindet daher identisch. Daraus folgt

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} B(4n - r^2) = 0.$$

2. Die Funktion  $U_4([g, \vartheta])$  mit  $[g, \vartheta] = g'(\tau)\vartheta(\tau) - 3g(\tau)\vartheta'(\tau)$  ist eine Modulform vom Gewicht 4 für  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und daher ein Vielfaches von  $E_4$ . Daraus folgt

$$\sum_{r > 0} r^2 B(4n - r^2) = 240\sigma_3(n),$$

wobei wir  $\sigma_3(0) = \frac{1}{240}$  setzen müssen.

Die beiden Relationen zusammen bestimmen die Folge  $B(d)$  bereits eindeutig. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} B(-1) &= 240\sigma_3(0) = 1, \\ B(0) &= -2B(-1) = -2, \\ B(3) &= 240\sigma_3(1) - 4B(0) = 248, \\ B(4) &= -2B(3) - 2B(0) = -492. \end{aligned}$$

Spaltet man die Summanden für  $B(-1)$  und  $B(0)$  in den obigen Relationen ab (sie tauchen nur auf, wenn  $n$  oder  $4n + 1$  ein Quadrat ist), so sieht man, dass man folgende Relationen für die Spuren von  $J$  zeigen muss.

## 5.2 Die erzeugende Reihe der Spuren der singulären Werte

**Satz 5.2.3.** *Es gilt*

$$\sum_{|r| < 2\sqrt{n}} \operatorname{tr}_J(4n - r^2) = \begin{cases} -4, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ 2, & \text{falls } 4n + 1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

und

$$\sum_{1 \leq r < 2\sqrt{n}} r^2 \operatorname{tr}_J(4n - r^2) = -240\sigma_3(n) + \begin{cases} -8n, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ 4n + 1, & \text{falls } 4n + 1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Wir beweisen hier nur die erste Relation (5.2.1). Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, dass  $n$  kein Quadrat ist. Den vollständigen Beweis findet man in der Arbeit von Zagier.

Es sei  $F_n(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$  das  $n$ -te modulare Polynom, welches durch die Eigenschaft

$$F_n(X, j(\tau)) = \prod_{M \in \Gamma \backslash \mathcal{M}_n} (X - j(M\tau))$$

definiert ist. Wir nehmen zunächst an, dass  $n$  kein Quadrat ist. Die Funktion  $F_n(j(\tau), j(\tau))$  verschwindet genau an den Punkten  $\tau \in \mathbb{H}$  die von einem  $M \in \mathcal{M}_n$  fixiert werden. Dies sind genau CM-Punkte  $\tau_Q$  zu quadratischen Formen  $Q \in \mathcal{Q}_{4n-r^2}$  der Diskriminante  $r^2 - 4n$  für ein  $r \in \mathbb{Z}$  mit  $|r| < 2\sqrt{n}$ . Daraus folgt

$$F_n(X, X) = C \prod_{|r| < 2\sqrt{n}} \mathcal{H}_{4n-r^2}(X)$$

mit einer Konstante  $C \neq 0$ , wobei

$$\mathcal{H}_d(X) = \prod_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} (X - j(\tau_Q))^{1/w_Q}.$$

Wir haben die  $q$ -Entwicklung

$$\mathcal{H}_d(j(\tau)) = \prod_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} (q^{-1} - J(\tau_Q) + O(q))^{1/w_Q} = q^{-H(d)}(1 - \operatorname{tr}_J(d)q + O(q^2)),$$

Andererseits können wir mit dem Standardrepräsentantensystem  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  mit  $ad = n, d > 0, 1 \leq b \leq d$ , berechnen:

$$\begin{aligned} F_n(j(\tau), j(\tau)) &= \prod_{ad=n} \prod_{b=1}^n \left( j(\tau) - j\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) \right) \\ &= \prod_{ad=n} \prod_{b=1}^d \left( q^{-1} - e^{-2\pi ib/d} q^{-a/d} + O(q^{>0}) \right) \\ &= \prod_{ad=n} (q^{-d} - q^{-a})(1 + O(q^{>1})) \\ &= \prod_{ad=n} \pm q^{-\max\{a,d\}} (1 - \varepsilon_a q + O(q^2)) \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_a$  gleich 1 ist falls  $|a - d| = 1$  (was nur möglich ist, wenn  $4n + 1$  ein Quadrat ist), und 0 andernfalls. Daraus folgt die erste Relation (5.2.1) im Fall dass  $n$  kein Quadrat ist.





# 6 Anhang

## 6.1 Werkzeuge aus der Funktionentheorie

Wir geben einen Überblick über einige grundlegende Sätze der Funktionentheorie, die wir in der Vorlesung benutzen. Wir folgen dem Buch *Funktionentheorie 1* von Freitag und Busam.

### 6.1.1 Holomorphe Funktionen

**Definition 6.1.1.** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph* auf  $U$ , falls die Ableitung

$$f'(a) = \lim_{\tau \rightarrow a} \frac{f(\tau) - f(a)}{\tau - a}$$

für jeden Punkt  $a \in U$  existiert.

**Bemerkung 6.1.2.** Hier ein paar grundlegende Beispiele und Eigenschaften:

1. Jedes Polynom  $p(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k \tau^k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$ .
2. Jede rationale Funktion  $p(\tau)/q(\tau)$  ist holomorph außerhalb der Nullstellen von  $q$ .
3. Summen und Produkte von holomorphen Funktionen sind wieder holomorph. Ist  $g$  holomorph auf  $U$ , so ist auch  $1/g$  holomorph auf  $U \setminus \{\tau \in U : g(\tau) = 0\}$ .
4. Es gelten die üblichen Ableitungsregeln, z.B. die Kettenregel.
5. Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar, und jede ihrer Ableitungen ist holomorph.
6. Jede holomorphe Funktion  $f$  lässt sich lokal in ihre Taylorreihe entwickeln, das heißt, für jedes  $a \in U$  konvergiert die Taylorreihe

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\tau - a)^n$$

auf einer Umgebung von  $a$ .

7. Man darf die Taylorreihe gliedweise ableiten, d.h. es gilt

$$f'(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} n(\tau - a)^{n-1}$$

8. Die Funktionen  $e^\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!}$ ,  $\sin(\tau)$ ,  $\cos(\tau)$  sind holomorph auf  $\mathbb{C}$ .
9. Die Funktionen  $\operatorname{Re}(\tau)$ ,  $\operatorname{Im}(\tau)$ ,  $\bar{\tau}$  und  $|\tau|$  sind nicht holomorph.

## 6 Anhang

**Satz 6.1.3** (Identitätssatz). Sei  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Sind  $f, g$  auf  $U$  holomorph und besitzt die Menge

$$\{\tau \in U : f(\tau) = g(\tau)\}$$

einen Häufungspunkt in  $U$ , so gilt  $f = g$  auf ganz  $U$ .

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge. Eine Folge  $f_1, f_2, f_3, \dots$  von Funktionen auf  $U$  heißt *lokal gleichmäßig konvergent*, wenn für jedes Kompaktum  $K \subset U$  die Folge  $f_1|_K, f_2|_K, f_3|_K, \dots$  gleichmäßig konvergiert.

**Satz 6.1.4** (Weierstraßscher Konvergenzsatz). Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Konvergiert eine Folge  $(f_n)$  holomorpher Funktionen lokal gleichmäßig auf  $U$ , so ist die Grenzfunktion  $f$  holomorph auf  $U$  und die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f'$ .

**Bemerkung 6.1.5.** Wir benutzen diesen Satz oft, um zu zeigen, dass Reihen und Integrale von (offensichtlich) holomorphen Funktionen ebenfalls wieder holomorph sind.

**Beispiel 6.1.6.** 1. Die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ist holomorph für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

2. Die Gammafunktion

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

ist holomorph für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

### 6.1.2 Meromorphe Funktionen

**Definition 6.1.7.** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f$  heißt *meromorph* auf  $U$ , falls es eine diskrete Teilmenge  $P_f \subset U$  gibt, so dass gilt:

1.  $f : U \setminus P_f \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph
2.  $f$  hat Pole an den Punkten in  $P_f$ , das heißt, für jedes  $a \in P_f$  besitzt  $f$  eine *Laurent-Entwicklung* der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c(n)(\tau - a)^n,$$

die auf einer punktierten Umgebung von  $a$  konvergiert. Dabei sind  $n_0 \in \mathbb{Z}$  und  $c(n) \in \mathbb{C}$  (von  $f$  und  $a$  abhängig).

Ist  $n_0 < 0$  in der Laurent-Entwicklung von  $f$ , so sagen wir, dass  $f$  einen Pol der Ordnung  $-n_0$  bei  $a$  hat. Allgemeiner definiert man für jeden Punkt  $a \in U$  die Ordnung  $\operatorname{ord}_a(f) = n_0$ , wobei  $n_0$  der kleinste Index ist, für den  $c(n_0) \neq 0$  in der Laurent- oder Taylor-Entwicklung von  $f$  bei  $a$  ist.

**Bemerkung 6.1.8.** 1. Die Funktion  $1/\tau$  ist meromorph mit einem Pol der Ordnung 1 bei  $\tau = 0$ . Andererseits schreiben wir  $\operatorname{ord}_0(1/\tau) = -1$ .

2. Jede rationale Funktion  $p(\tau)/q(\tau)$  ist meromorph auf  $\mathbb{C}$ . Es gilt
3. Sind  $f, g$  mit  $g \neq 0$  meromorphe Funktionen, so ist  $f/g$  meromorph, und es gilt

$$\text{ord}_\tau(f/g) = \text{ord}_\tau(f) - \text{ord}_\tau(g).$$

4. Die Menge aller meromorphen Funktionen bildet einen Körper.

**Bemerkung 6.1.9.** Die oben angegebenen Summen- und Integraldarstellungen der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta(s)$  und der Gammafunktion  $\Gamma(s)$  konvergieren nur für genügend großen Realteil von  $s$ . Man kann aber zeigen, dass beide Funktionen *meromorphe Fortsetzungen* auf ganz  $\mathbb{C}$  haben. Das bedeutet z.B. für die Riemannsche Zetafunktion, dass eine Funktion  $\tilde{\zeta}(s)$  existiert, die auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorph ist, so dass  $\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s)$  für  $\text{Re}(s) > 1$  gilt. Nach dem Identitätssatz ist die meromorphe Fortsetzung eindeutig, das heißt, wenn man eine zweite auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $\hat{\zeta}(s)$  findet mit  $\hat{\zeta}(s) = \zeta(s)$  für  $\text{Re}(s) > 1$ , so gilt automatisch  $\hat{\zeta}(s) = \tilde{\zeta}(s)$  für *alle*  $s \in \mathbb{C}$ , die keine Polstellen der beiden Funktionen sind.

**Definition 6.1.10.** Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Für einen stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  und eine meromorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $D_f \cap \gamma = \emptyset$  definieren wir das Wegintegral von  $f$  entlang  $\gamma$  durch

$$\int_\gamma f(\tau) d\tau = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ist  $\gamma$  stückweise stetig differenzierbar, so definieren wir  $\int_\gamma f(\tau) d\tau$  als Summe der Wegintegrale über die stetig differenzierbaren Teilwege von  $\gamma$ .

Wir benötigen folgendes Korollar aus dem *Residuensatz*.

**Satz 6.1.11.** Sei  $f \neq 0$  meromorph auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\int_\gamma \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = 2\pi i \sum_\tau w_\tau(\gamma) \text{ord}_\tau(f)$$

wobei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U$  ist, der nicht die Null- und Polstellen von  $f$  enthält, und  $w_\tau(\gamma) \in \mathbb{Z}$  die Windungszahl von  $\gamma$  bzgl.  $\tau$  ist.

**Bemerkung 6.1.12.** Wir wollen den Satz auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  anwenden, welche einfach zusammenhängend ist. In unseren Anwendungen wird die Windungszahl  $w_\tau(\gamma)$  außerdem immer gleich 1 sein. Die rechte Seite der Formel ist dann also einfach die Summe der Null- und Polstellenordnungen von  $f$ .