Modulformen - Übung 1

Dr. Markus Schwagenscheidt

01.04.2019

Aufgabe 1. Es sei

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

die komplexe obere Halbebene und

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

die spezielle lineare Gruppe der ganzzahligen 2×2 Matrizen mit Determinante 1.

(1) Was ist die inverse Matrix von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$? Wie sieht die inverse Matrix aus, wenn die Matrix invertierbar ist, aber nicht Determinante 1 hat?

(2) Zeigen Sie: Zu gegebenen $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegt.

(3) Zeigen Sie: Zwei Matrizen $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ haben genau dann dieselbe untere Zeile (c, d), wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt so dass

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M'.$$

(4) Es sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie die Formel

$$\mathrm{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Wie ändert sich die Formel, wenn die Matrix nicht Determinante 1 hat?

(5) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mittels *Möbiustransformationen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

auf $\mathbb{H}$ operiert.

(6) Zeigen Sie: Definieren $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dieselbe Möbiustransformation auf $\mathbb{H}$, so gilt $M = \pm M'$.

(7) Zeigen Sie, dass die *Cayley-Transformation*

$$\tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bijektiv auf den offenen Einheitskreis $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ abbildet. Geben Sie insbesondere die Umkehrabbildung $D \to \mathbb{H}$ an.

Aufgabe 2. Eine *ganzzahlige binäre quadratische Form* ist von der Form

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad A, B, C \in \mathbb{Z}.$$

Die *Diskriminante* von Q ist die Zahl $D = B^2 - 4AC$. Es sei $\mathcal{Q}_D$ die Menge aller ganzzahligen binären quadratischen Formen der Diskriminante D.

(1) Finden Sie für jedes $D \in \mathbb{Z}$ mit $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ jeweils eine ganzzahlige binäre quadratische Form der Diskriminante D.

(2) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mittels

$$\left(Q \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(x,y) = Q(ax+by, cx+dy)$$

von rechts auf $\mathcal{Q}_D$ operiert.

(3) Es sei Q eine ganzzahlige binäre quadratische Form. Zeigen Sie die Formel

$$Q\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^{-2}\left(Q \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(\tau, 1)$$

für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$.

(4) Für $D > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 2$ definieren wir die Funktion

$$f_{k,D}(\tau) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{1}{Q(\tau,1)^k}.$$

Man kann zeigen, dass die Reihe absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, und daher eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ darstellt. Zeigen Sie, dass $f_{k,D}$ die Funktionalgleichung

$$f_{k,D}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f_{k,D}(\tau)$$

für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$ erfüllt[1].

Aufgabe 3. Eine *Partition* einer natürlichen Zahl n ist eine Zerlegung $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ mit natürlichen Zahlen $1 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \leq n$. Zum Beispiel ist $5 = 1+1+3$ eine Partition von 5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n, wobei wir ohne Beachtung der Reihenfolge zählen. Es ist z.B. $p(3) = 3$, weil es die Partitionen $3 = 3, 3 = 2+1$ und $3 = 1+1+1$ gibt.

(1) Berechnen Sie $p(1), \ldots, p(6)$ per Hand.

(2) Es sei $p(n,k)$ die Anzahl der Partitionen von n mit genau k Summanden. Zeigen Sie

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k),$$

und dass die $p(n,k)$ rekursiv gegeben sind durch $p(n,1) = 1$ und $p(n,n) = 1$ und

$$p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k).$$

[1] Man sagt, dass $f_{k,D}$ wie eine Modulform vom Gewicht $2k$ transformiert.

(3) Machen Sie sich klar, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}$$

gilt (wobei wir $p(0) = 1$ setzen)[2].

Aufgabe 4. Installieren Sie sage math (https://www.sagemath.org/de/)[3] und schreiben Sie jeweils ein Programm, dass die folgenden Aufgaben löst:

(1) Gib 'Hello world!' aus.
(2) Gib alle Primzahlen zwischen 1 und n aus, für ein vom Benutzer gegebenes n.
(3) Wir repräsentieren eine binäre quadratische Form $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ in sage als Liste $[A, B, C]$. Schreiben Sie jeweils ein Programm, dass auf Eingabe von $Q = [A, B, C]$ folgende Aufgaben löst:
   (a) Berechne die Diskriminante von Q.
   (b) Berechne $Q(x, y)$ für gegebene $x, y \in \mathbb{R}$.
   (c) Berechne $Q \circ M$ für eine gegebene Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
(4) Berechne die Partitionsfunktion $p(n)$.

[2] Wir werden später sehen, dass die Funktion $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^n)$ mit $q = e^{2\pi i\tau}$ eine Modulform vom Gewicht $1/2$ ist. Daher ist die erzeugende Reihe der Partitionsfunktion eine Modulform vom Gewicht $-1/2$.

[3] Alternativ können Sie sich einen Account bei cocalc.com erstellen, und sage im Browser benutzen.