Modulformen - Übung 2

Dr. Markus Schwagenscheidt

08.04.2019

Aufgabe 1. Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\},$$

wobei die Kongruenz eintragsweise zu verstehen ist.

(1) Machen Sie sich klar, dass $\Gamma(N)$ tatsächlich eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass $\Gamma(N)$ ein Normalteiler von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.
Hinweis: Finden Sie einen geeigneten Homomorphismus, dessen Kern $\Gamma(N)$ ist.

(3) Eine Gruppe $\Lambda \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ heißt *Kongruenzuntergruppe*, falls sie $\Gamma(N)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ enthält. Zeigen Sie, dass jede Kongruenzuntergruppe endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$ operiert.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass zwei elliptische Kurven $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_1}$ und $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_2}$ genau dann isomorph sind, wenn es ein $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $\tau_2 = M\tau_1$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathbb{C}/\Lambda$ und $\mathbb{C}/\Lambda'$ genau dann isomorph sind, wenn $\Lambda' = \alpha\Lambda$ für ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4. (Sage)

(1) Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ sei

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

die Riemannsche Zetafunktion. Schreiben Sie ein Programm, dass $\zeta(s)$ näherungsweise berechnet, und überzeugen Sie sich mittels Ihres Programms, dass die folgenden Auswertungen gelten:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Verleichen Sie ihre Funktion für einige s-Werte mit der Sage-Funktion zeta(s).

(2) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ sei

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

die Gammafunktion. Schreiben Sie ein Programm, dass $\Gamma(s)$ näherungsweise berechnet, und überzeugen Sie sich, dass

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

gilt. Verleichen Sie ihre Funktion für einige s-Werte mit der Sage-Funktion gamma(s).