Modulformen - Übung 4

Dr. Markus Schwagenscheidt

29.04.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jede Matrix endlicher Ordnung in Γ konjugiert ist zu einer der Matrizen

$$\pm I, \quad \pm S, \quad \pm TS, \quad \pm(TS)^2, \quad \pm ST, \quad \pm(ST)^2.$$

Hinweis: Jede Matrix $M \in \Gamma$ endlicher Ordnung ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, und ihre beiden Eigenwerte sind zueinander konjugierte Einheitswurzeln. Was folgt daraus für $|\mathrm{tr}(M)|$?

Aufgabe 2. Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe 1-periodische Funktion mit Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_f(n) q^n.$$

Zeigen Sie die Formel

$$a_f(n) = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)} dx,$$

wobei $y > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die normalisierte Eisensteinreihe E_k durch die Formel

$$E_k(z) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k M$$

gegeben ist, wobei $\Gamma_\infty = \{\pm T^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4. Die Bernoulli-Zahlen B_n sind definiert durch

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

(1) Berechnen Sie B_0, B_1 und B_2 per Hand.

(2) Zeigen Sie, dass $B_n = 0$ für alle ungeraden $n \geq 3$ gilt.

(3) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} = 0$$

für $m \geq 1$ gilt.

(4) Zeigen Sie, dass $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 5.

(1) Berechnen Sie die ersten drei Fourierkoeffizienten von E_8 mittels der Formel aus der Vorlesung.

(2) Berechnen Sie die ersten drei Fourierkoeffizienten von Δ durch Ausmultiplizieren der Produktentwicklung

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Aufgabe 6. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das die folgenden Aufgaben löst:

(1) Berechne die Teilersumme $\sigma_{k-1}(n)$ für gegebene k, n.

(2) Berechne die Fourierentwicklung von E_k bis zu einem vorgegebenem q^N.
Zusatz: Überzeugen Sie sich mithilfe ihres Programms, dass $E_4^2 = E_8$ gilt.

(3) Berechne die Fourierentwicklung von $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$ bis zu einem vorgegebenem q^N.

(4) Verifizieren Sie die Formel

$$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k$$

für gerade $k \geq 2$ numerisch für einige Werte von k.