Modulformen - Übung 5

Dr. Markus Schwagenscheidt

06.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie
$$\int_i^\rho \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{2\pi i}{12},$$
wobei der Integrationsweg von i nach ρ entlang des Einheitskreises verläuft.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Ramanujan τ-Funktion die Kongruenz
$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Eisensteinreihen $E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{14}$ in $\mathcal{F}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie $E_4^2 = E_8$. Beweisen Sie damit die Gleichung
$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige modulare Funktion j_n gibt, so dass $j_n = q^{-n} + O(q)$. Konstruieren Sie dazu j_n als Polynom in j.

Aufgabe 6. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das folgende Aufgaben löst:

(1) Berechne $\dim(M_k)$ und $\dim(S_k)$ für $k \in \mathbb{Z}$.
(2) Berechne die Fourierentwicklung von j bis zu einem vorgegebenen q^N.
(3) Berechne die Polynome p_n so dass $j_n = p_n(j)$.

Aufgabe 7. (Zusatzaufgabe)

(1) Es sei $f \in M_k$. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' von f das Transformationsverhalten
$$f'(M\tau) = (c\tau + d)^{k+2} f'(\tau) + kc(c\tau + d)^{k+1} f(\tau)$$
für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ besitzt.
(2) Für $f \in M_k$ definieren wir den *Raising-Operator* durch
$$R_k f = 2if' + ky^{-1} f.$$
Zeigen Sie, dass $R_k f$ wie eine Modulform vom Gewicht $k+2$ unter Γ transformiert.
(3) Für $f \in M_k$ und $g \in M_\ell$ definieren wie die *Rankin-Cohen Klammer* durch
$$[f, g] = \ell f' g - k f g'.$$
Zeigen Sie, dass $[f, g] \in S_{k+\ell}$ eine Spitzenform vom Gewicht $k + \ell + 2$ ist.

(4) Zeigen Sie

$$\Delta = \frac{1}{1728 \cdot 4\pi i}[E_4, E_6]$$

und beweisen Sie damit die Gleichung

$$\tau(n) = \frac{n}{12}(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) - 70 \sum_{\substack{r,s\geq 1\\ r+s=n}} (3r-2s)\sigma_3(r)\sigma_5(s)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.