Modulformen - Übung 6

Dr. Markus Schwagenscheidt

13.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $j(i) = 1728$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(1) j' ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht 2.
(2) Jede meromorphe Modulform vom Gewicht 2 lässt sich als Polynom in j, j' schreiben.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die nicht-holomorphe Eisensteinreihe

$$E_2^*(\tau) = -\frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)} + 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

wie eine Modulform vom Gewicht 2 unter Γ transformiert.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die holomorphe Eisensteinreihe E_2 das Transformationsverhalten

$$E_2|_2 M(\tau) = E_2(\tau) - \frac{6ic}{\pi(c\tau + d)}$$

für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ besitzt.

Aufgabe 5.

(1) Zeigen Sie, dass
$$E_2(\tau) - NE_2(N\tau) = E_2^*(\tau) - NE_2^*(N\tau)$$
gilt
(2) Zeigen Sie, dass
$$E_{2,\Gamma_0(N)}(\tau) = E_2(\tau) - NE_2(N\tau)$$
für $N \geq 2$ wie eine Modulform vom Gewicht 2 unter $\Gamma_0(N)$ transformiert[1].
(3) Zeigen Sie, dass $E_{2,\Gamma_0(N)}|_2 L$ für jede Matrix $L \in \Gamma$ bei ∞ holomorph ist.

Aufgabe 6. Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die wie eine Modulform vom Gewicht k unter Γ transformiert. Zeigen Sie:

(1) Ist $k \not\equiv 0 \pmod 4$, so ist $f(i) = 0$.
(2) Ist $k \not\equiv 0 \pmod 6$, so ist $f(\rho) = 0$.

Benutzen Sie dies um die Werte $E_2(i)$ und $E_2(\rho)$ zu berechnen.

Aufgabe 7. (Sage) Berechnen Sie die Fourierentwicklung von E_2 bis zu einem vorgegebenen q^N. Berechnen Sie damit die Werte $E_2(i)$ und $E_2(\rho)$.

[1] Zur Erinnerung: $\Gamma_0(N)$ ist Gruppe aller $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Matrizen, deren linker unterer Eintrag durch N teilbar ist.