Modulformen - Übung 7

Dr. Markus Schwagenscheidt

20.05.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(1) Γ hat genau eine Spitze, die durch ∞ repräsentiert wird.
(2) $\Gamma_0(p)$ für eine Primzahl p hat genau zwei Spitzen, die durch ∞ und 0 repräsentiert werden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass eine Matrix $M \in \Gamma \setminus \{\pm I\}$ genau dann parabolisch ist, wenn sie im Stabilisator eines $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ liegt. Bestimmen Sie außerdem den Stabilisator Γ_∞ von ∞ in Γ.

Aufgabe 3. Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Für eine Spitze $[s] \in \Lambda \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ wählen wir ein $L \in \Gamma$ mit $L\infty = s$ und definieren die Fourierentwicklung einer Modulform $f \in M_k(\Lambda)$ bei $[s]$ als

$$f|_k L = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f,L}(n) q^{n/N}.$$

(1) Machen Sie sich klar, dass dies eigentlich nicht wohldefiniert ist: Wie ändert sich die Fourierentwicklung, wenn man s modulo Λ ändert, oder wenn man eine andere Matrix M mit $M\infty = s$ wählt?
(2) Zeigen Sie, dass die *Ordnung von f bei s*

$$\mathrm{ord}_s(f) = \mathrm{ord}_\infty(f|_k L) = \frac{1}{N} \min\{n \in \mathbb{N} : a_{f,L}(n) \neq 0\}$$

wohldefiniert ist, also nicht von der Klasse von s und von der Wahl von L abhängt.

Aufgabe 4. Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe. Zeigen Sie, dass $M_0(\Lambda) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}\left(E_{k,\Gamma_0(N)}\right) = E_k$ für gerade $k \geq 4$ gilt.

Aufgabe 6. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Für $N \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{\ell(N)} e^{2\pi i n\ell/N} = \begin{cases} N, & \text{falls } N \mid n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Ist p eine Primzahl und $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) q^n \in M_k$, so ist

$$f|U_p = \sum_{\substack{n=0 \\ p|n}}^{\infty} a_f(n) q^n \in M_k(\Gamma_0(p^2)).$$

Aufgabe 7. (Sage) Schreiben Sie jeweils ein Programm, das $r_4(n)$ und $\sum_{d|n, 4\nmid d} d$ berechnet und vergleichen Sie die Ergebnisse für $1 \leq n \leq 10$.

Aufgabe 8. (Zusatzaufgabe) Es sei Λ eine Kongruenzuntergruppe der Stufe N. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\pm I \in \Lambda$ gilt. Zeigen Sie die folgende Gewichtsformel: Für $0 \neq f \in M_k(\Lambda)$ gilt

$$\sum_{s \in \Lambda \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\Gamma_s : \Lambda_s] \operatorname{ord}_s(f) + \sum_{\tau \in \Lambda \backslash \mathbb{H}} \frac{1}{\frac{1}{2}|\Lambda_\tau|} \operatorname{ord}_\tau(f) = \frac{k}{12}[\Gamma : \Lambda].$$

Dabei bezeichnen Λ_s bzw. Λ_τ die Stabilisatoren von $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bzw. $\tau \in \mathbb{H}$.