Modulformen - Übung 8

Dr. Markus Schwagenscheidt

27.05.2019

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\mathrm{vol}(\mathcal{F}) = \frac{\pi}{3}$.

Aufgabe 2. Es seien $f, g \in M_k$, so dass f oder g eine Spitzenform ist. Dann gilt

(1) $\langle f, g\rangle$ ist linear in f und antilinear in g.
(2) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$.
(3) $\langle f, f\rangle \geq 0$ für $f \in S_k$ und $\langle f, f\rangle = 0$ nur für $f = 0$.

Aufgabe 3. Es sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in M_k$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es gilt
$$f^c = \overline{f(-\overline{\tau})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_f(n)}q^n \in M_k.$$
(2) Es gilt
$$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + f^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_f(n))q^n \in M_k,$$
$$\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - f^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_f(n))q^n \in M_k.$$
(3) Es gilt $\langle f, f\rangle = \langle f^c, f^c\rangle$.

Aufgabe 4. Es sei $k \geq 4$ gerade und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) Ist der m-te Fourierkoeffizient der m-ten Poincaréreihe $P_{m,k}$ gleich 0, so ist $P_{m,k} = 0$.
(2) $P_{m,k}$ hat reelle Fourierkoeffizienten.
(3) Es bezeichne $a_m(n)$ den n-ten Fourierkoeffizienten von $P_{m,k}$. Dann gilt
$$m^{k-1}a_m(n) = n^{k-1}a_n(m).$$

Aufgabe 5. Es seien $f \in S_k$ und $g \in S_\ell$ mit $k, \ell, k - \ell \geq 4$ gerade. Dann gilt
$$\langle f, E_{k-\ell} \cdot g\rangle = (k-2)! \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\overline{a_g(n)}(4\pi n)^{1-k}.$$

Aufgabe 6. (Sage) Zeichnen Sie Fundamentalbereiche für $\Gamma_0(N)$ mit $1 \leq N \leq 10$.