Modulformen - Übung 9

Dr. Markus Schwagenscheidt

03.06.2019

Aufgabe 1. Es sei $k \geq 4$ gerade und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$T_n P_{m,k} = \sum_{d|(m,n)} (n/d)^{k-1} P_{mn/d^2,k}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie direkt (ohne die Theorie der Hecke-Operatoren), dass

$$\sigma_{k-1}(p)\sigma_{k-1}(m) = \sigma_{k-1}(mp) + p^{k-1}\sigma_{k-1}(m/p)$$

für $k > 1$, jede Primzahl p und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Leiten Sie daraus einen neuen Beweis dafür her, dass $T_n E_k = \sigma_{k-1}(n) E_k$ gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Für eine Primzahl p und $r, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_{p^r} T_{p^s} = \sum_{n=0}^{\min(r,s)} p^{\nu(k-1)} T_{p^{r+s-2\nu}}.$$

Beweisen Sie die Aussage per Induktion nach s, indem Sie die Relation

$$T_{p^r} T_p = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}}$$

für $r \in \mathbb{N}$ benutzen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgende Identität formaler Potenzreihen:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} T_{p^r} X^r \right) (1 - T_p X + p^{k-1} X^2) = 1.$$

Aufgabe 5. Es sei $f \in M_k$ und p ein Primzahl. Setze $f_p(\tau) = f(p\tau) \in M_k(\Gamma_0(p))$. Dann gilt $T_p f = p^{k-1} \operatorname{tr}(f_p)$.