Modulformen - Übung 10

Dr. Markus Schwagenscheidt

17.06.2019

Aufgabe 1. Die *Möbiusfunktion* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\#\{\text{Primteiler von } n\}} & \text{falls } n \text{ quadratfrei}, \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei}. \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) μ ist multiplikativ.

(2) Es gilt

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

(3) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zetafunktion für $\mathrm{Re}(s) > 1$ als Eulerprodukt

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

darstellbar ist.

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : (a, n) = 1\} = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}|$$

die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Aufgabe 4. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ sei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ die Gammafunktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. *Hinweis:* Partielle Integration.

(2) $\Gamma(s)$ lässt sich meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, mit einfachen Polen genau bei den nichtpositiven ganzen Zahlen $0, -1, -2, -3, \ldots$. *Hinweis:* Benutzen Sie die vorige Teilaufgabe induktiv.

Aufgabe 5. Es sei $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ die vervollständigte Riemannsche Zetafunktion. Zeigen Sie die Integraldarstellung

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty (\vartheta(it/2) - 1)(t^{s/2} + t^{-s/2+1/2})\frac{dt}{t} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s},$$

mit der Jacobischen Thetafunktion $\vartheta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$. Leiten Sie daraus die meromorphe Fortsetzbarkeit nach ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen bei $s = 0$ und $s = 1$ und die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

her.

Zeigen Sie insbesondere, dass $\zeta(s)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist mit einem einfachen Pol bei $s = 1$, und dass $\zeta(s)$ Nullstellen bei allen geraden negativen Zahlen hat.

Aufgabe 6. Zeigen Sie für gerade $k \geq 4$

$$L_{E_k}(s) = -\frac{2k}{B_k}\zeta(s)\zeta(s+1-k).$$

Zeigen Sie mithilfe der letzten Aufgabe, dass die *vervollständigte L-Funktion*

$$\Lambda_{E_k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{E_k}(s)$$

eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen bei $s = 0$ und $s = k$ besitzt.