Modulformen - Übung 11

Dr. Markus Schwagenscheidt

24.06.2019

Aufgabe 1. Es sei $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \in S_k$. Zeigen Sie die Darstellung

$$\Lambda_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^s}\Gamma(s, 2\pi n) + i^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{(2\pi n)^{k-s}}\Gamma(k-s, 2\pi n),$$

wobei $\Gamma(s,x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{s-1}dx$ die unvollständige Gammafunktion ist. Zeigen Sie, dass die rechte Seite für alle $s \in \mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, und somit eine holomorphe Fortsetzung für $\Lambda_f(s)$ darstellt.

Aufgabe 2. Ein *Dirichlet-Charakter* mod N ist ein Homomorphismus

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Wir fassen χ als Funktion auf $\mathbb{Z}$ auf mittels $\chi(n) = 0$ für $(n, N) > 1$. Der triviale Dirichlet-Charakter mod N ist definiert durch

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (n,N) = 1, \\ 0, & \text{falls } (n,N) > 1, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Der *Führer* von χ ist die kleinste natürliche Zahl N' so dass man $\chi = \chi_0\chi'$ schreiben kann, wobei χ_0 der triviale Charakter mod N und χ' ein Dirichlet-Charakter mod N' ist. Ein Dirichlet-Charakter χ heißt *primitiv*, falls der Modulus N von χ gleich dem Führer von χ ist. *Wir nehmen in der ganzen Aufgabe an, dass χ primitiv mit Führer N ist!*

(1) Für einen Dirichlet-Charakter χ mod N und $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$G(\chi, n) = \sum_{a(N)} \chi(a) e^{2\pi i n a/N}$$

die n-te *Gauss-Summe* von χ. Wir setzen $G(\chi) = G(\chi, 1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt

$$G(\chi, n) = \overline{\chi}(n) G(\chi).$$

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung nach $(n, N) = 1$ und $(n, N) > 1$. Für $(n, N) > 1$ zeigen Sie $G(\chi, n) = 0$ mithilfe der folgenden Aussage (die sie ohne Beweis verwenden können): Für jeden Teiler $d \mid N$ mit $d < N$ gibt es ein $\alpha \equiv 1 \pmod{d}$ mit $(\alpha, N) = 1$ und $\chi(\alpha) \neq 1$.

(b) Es gilt

$$|G(\chi)|^2 = N.$$

(2) Wir nehmen nun an, dass χ *gerade* ist, das heißt $\chi(-1) = 1$. Zeigen Sie mithilfe der Poissonschen Summenformel, dass die Thetareihe $\vartheta_\chi(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{\pi i n^2 \tau}$ die Transformationsformel

$$\vartheta_{\overline{\chi}}(i/N^2 y) = \frac{N\sqrt{y}}{G(\chi)} \vartheta_\chi(iy)$$

für $y > 0$ erfüllt.

(3) Wir nehmen wieder an, dass χ gerade ist. Wir betrachten die *Dirichlet-L-Funktion*

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s},$$

die für $\mathrm{Re}(s) > 1$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass die vervollständigte Dirichlet-L-Funktion

$$\Lambda(\chi, s) = \left(\frac{\pi}{N}\right)^{-s/2} \Gamma(s/2) L(\chi, s)$$

eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ besitzt und die Funktionalgleichung

$$\Lambda(\overline{\chi}, 1 - s) = \frac{\sqrt{N}}{G(\chi)} \Lambda(\chi, s)$$

erfüllt. Zeigen Sie insbesondere, dass $\Lambda(\chi, s)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, falls χ nicht trivial ist.
Hinweis: Schreiben Sie $\Lambda(\chi, s)$ als Integral über ϑ_χ und benutzen Sie die Transformationsformel aus der letzten Teilaufgabe.

(4) Zeigen Sie

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Aufgabe 3. (Sage) Schreiben Sie ein Programm, dass die vervollständigte L-Reihe $\Lambda_f(s)$ einer Spitzenform bei beliebigem $s \in \mathbb{C}$ auswertet. Benutzen Sie dafür die Darstellung aus Aufgabe 1.