# Modulformen - Übung 13

Dr. Markus Schwagenscheidt

08.07.2019

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass $n$ und $4n+1$ für $n \in \mathbb{N}$ nicht beides Quadrate sein können.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie: Sind $a, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad = n$ und $|a-d| = 1$, so it $4n+1$ ein Quadrat.

**Aufgabe 3.** Es sei $(B(d))_{d \geq -1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $B(d) = 0$ für $d \not\equiv 0, 3 \pmod 4$.

(1) Zeigen Sie, dass die beiden Relationen

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} B(4n - r^2) = 0,$$

$$\sum_{r > 0} r^2 B(4n - r^2) = 240\sigma_3(n),$$

mit $\sigma_3(0) = \frac{1}{240}$ die Folge $B(d)$ bereits eindeutig festlegen.

(2) Zeigen Sie, dass die beiden Relationen äquivalent sind zu den Relationen

$$\sum_{|r| < 2\sqrt{n}} B(4n - r^2) = \begin{cases} 4, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ -2, & \text{falls } 4n+1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\sum_{1 \leq r < 2\sqrt{n}} r^2 B(4n - r^2) = 240\sigma_3(n) + \begin{cases} 8n, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ -(4n+1), & \text{falls } 4n+1 \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 4.** Es sei $F_n(X, Y)$ das $n$-te modulare Polynom. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tau \mapsto F_n(j(\tau), j(\tau))$ ihre Nullstellen genau bei den CM-Punkten $z_Q$ zu quadratischen Formen $Q \in \mathcal{Q}_{4n-r^2}$ für $r \in \mathbb{Z}$ mit $|r| < 2\sqrt{n}$ hat.