Differentialformen mit Polen entlang kontrahierbarer Divisoren

DIPLOMARBEIT

von

SEVERIN MÜLLER-PLATZ

angefertigt am Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus

Köln, im Wintersemester 2007/2008

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und einigen Menschen danken, die das Gelingen dieser Arbeit ermöglicht haben.

Als erstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Stefan Kebekus für die sehr gute und intensive Betreuung bedanken. Nicht weniger gilt mein Dank auch der restlichen Arbeitsgruppe, Sammy Barkowski, Sebastian Neumann, Daniel Greb und Dr. Kelly Jabbusch, die immer Zeit hatten um meine Fragen zu beantworten oder Probleme zu diskutieren.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Kommilitonen, Dorothee Müller, Christian Stromenger und Daniel Lohmann, bedanken, die meine Arbeit Korrektur gelesen und einige Tip- und Rechtschreibfehler gefunden haben.

Ein weiterer Dank gilt meiner Familie. Insbesondere meinen Eltern, Dr. Carl Müller-Platz und Bärbel Müller-Platz, die mich während meines gesamten Studiums moralisch und finanziell unterstützt haben.

Besonderer Dank gilt meiner Freundin Maria Kampes, die in den letzten sechs Monaten oft auf meine körperliche und geistige Anwesenheit verzichten musste und mein launisches Verhalten tolerierte.
–Danke für deine Geduld–

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht zu haben.

Köln, den 7. Mai 2008

(Severin Müller-Platz)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine logarithmische Differentialform ω auf einer offenen Teilmenge U eines logarithmisch glatten Paares (X, Δ) ist eine Form, die man lokal schreiben kann als $\omega = \sum_{i=0}^{k} \frac{f_i}{x_i} dx_i + \sum_{j=k+1}^{n} g_j dx_j$. Man erhält die lokal freie Garbe der logarithmischen Differentialformen $\Omega_X^1(\log \Delta)$. In dem Paper [KK07] von S. Kebekus und J. Kovaćs stellt sich die Frage ob es möglich ist symmetrische Potenzen von logarithmischen Differentialformen die ausserhalb eines kontrahierbaren Divisors E definiert sind über diesen fortzusetzen. Im allgemeinen ist diese Frage nicht geklärt. Doch wenn E der ezeptionelle Ort einer Logarithmischen Auflösung $\pi : (Y, \Gamma) \to (Z, \Delta)$ eines, von glatten analytischen Paaren dominierten, reduzierten Paares (Z, Δ) ist existiert immer eine Fortsetzung. Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit dem folgenden Fortsetzbarkeitstheorem, welches von (Kebekus Kovaćs) in ihrem Paper [KK07] 2007 bewiesen wurde:

Satz (Fortsetzbarkeits-Theorem)**.** *Sei (Z, Δ) ein reduziertes Paar, mit logarithmischer Auflösung $\pi : (Y, \Gamma) \to (Z, \Delta)$ und exzeptionellem Ort E. Wird (Z, Δ) von glatten analytischen Paaren dominiert, so gilt für jede offene Menge $U \subset Z$ mit Urbild $V := \pi^{-1}(U)$, dass für jedes*

$$\omega \in H^0\left(V \setminus E, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{V \setminus E}(log\Gamma)\right),$$

also für jede pluri-log-Form die außerhalb des π-exzeptionellen Ortes E definiert ist, eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(V, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_V(log(\Gamma + E_\Gamma))\right)$$

auf ganz V existiert. Dabei ist E_Γ der Teil des exzeptionellen Ortes, der nicht in Γ liegt.

Im Speziellen wollen wir das Ergebniss des Satzes für den Spezialfall der Quotientensingularität nochmals beweisen und für diesen Fall auch verbesseren.

In Kapitel 1 geben wir eine kurze Einführung in den Bergiff der logarithmischen Differentialformen und ein paar weitere Lemmata, die wir für die Fortsetzbarkeit benötigen werden.

In Kapitel 2 werden wir einen ausführlichen Beweis für das oben angesprochene Fortsetzbarkeits Theorem angeben.

In den letzten drei Kapiteln geht es dann um den Spezialfall der Quotientensingularitäten.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns zunächst mit dem Fall, dass $\Delta = \emptyset$ ist. Wir beweisen, dass 1-Formen als logarithmische Differentialform mindestens eine einfache Nullstelle entlang von E haben müssen. Der Beweis benutzt den Begriff des arithmetischen Geschlechts, für den wir am Anfang des Kapitels eine kurze Einführung geben.

In Kapitel 4 wird dann eine Verbesserung der Aussage des Fortsetzbarkeits-Theorems für den Fall der Quotientensingularität ohne Randdivisor bewiesen. Ferner geben wir Beispiele an, die belegen, dass diese nicht weiter verbessert werden kann.

Im letzten Kapitel betrachten wir dann eine einzelne $(-a)$-Kurve mit Randdivisor.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Zweiter Riemannscher Hebbarkeitssatz

In dieser Arbeit werden wir öfter den zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz und seine Anwendung für lokal freie Garben brauchen. Deshalb möchte ich hier kurz darauf eingehen. Für nähere Informationen siehe [KK83].

Fakt 1.1.1. *(Zweiter Riemannsche Hebbarkeitssatz) Sei X ein normaler Raum und $A \subset X$ eine analytische Teilmenge mit* $\operatorname{codim}(A) \geq 2$. *Dann hat jede holomorphe Funktion auf $X \setminus A$ eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf ganz X. Das heißt die Inklusion $X \setminus A \hookrightarrow X$ liefert einen Isomorphismus $\mathcal{O}^{hol}(X) \cong \mathcal{O}^{hol}(X \setminus A)$.*

Nach einigen GAGA-style Theoremen gelten folgende Fakten, für weiterführende Verweise siehe [GH94]:

Fakt 1.1.2. *Jede normale Varietät im Algebraisch Geometrischen Sinne ist auch ein normaler Raum wie er in [KK83] definiert wird.*

Fakt 1.1.3. *Sei X eine Varietät, $E \subset X$ eine Untervaritat mit Kodimension mindestens 1 und f eine reguläre Funktion auf $X \setminus E$, also $f \in H^0\left(X, \mathcal{O}_X(*E)\right)$. Dann ist jede holomorphe Funktion $\tilde{f}$ auf X, mit $\tilde{f}|_{X \setminus E} \equiv f$, bereits regulär. Anders gesagt für jede holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ von f gilt $\tilde{f} \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$*

Bemerkung. In Fakt 1.1.3 ist mit $\mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen und nich die Garbe der holomorphen Funktionen auf X gemeint.

Bemerkung 1.1.4. Eine Zariski abgeschlossene Teilmenge E einer normalen Varietät X ist eine analytische Teilmenge wie sie in [KK83] definiert wird.

Beweis. Sei $E \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät dann existiert eine offene Überdeckung U_i von X, so dass $E \cap U_i = V(f_0, ...f_n)$ mit $f_0, ..., f_n$ reguläre Funktionen auf X. □

Wir können also den zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz auf lokal freie Garben auf normalen Varietäten anwenden:

Lemma 1.1.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine lokal freie Garbe auf einer glatten Varietät X. Dann gilt für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge E mit* $\operatorname{codim}(E) \geq 2$, *dass jeder Schnitt der ausserhalb von E definiert ist, also*

$$\omega \in H^0 \left(U, \mathcal{A}(*E)\right)$$

sich auf ganz U fortsetzt, also

$$\omega \in H^0(U, \mathcal{A})$$

Beweis. Sei $\omega \in H^0 \left(U, \mathcal{A}(*E)\right)$ beliebig. Da $\mathcal{A}$ lokal frei ist existiert eine offene Überdeckung U_i von U, so dass

$$\omega|_{U_i} = \sum a_{i,j} \cdot e_{i,j}$$

mit $\{e_{i,j}\}$ ist lokales Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ und $a_{i,j}$ reguläre Funktion auf $U_i \setminus E$.
Da X eine glatte Varietät ist sind alle U_i normal. Mit Fakt 1.1.2 und Bemerkung 1.1.4 sind also die Bedingungen für den zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz erfüllt. Wir können also jedes $a_{i,j}$ eindeutig zu einer regulären Funktion $\tilde{a}_{i,j}$ auf ganz U_i fortsetzen. Somit muss die Einschränkung von ω auf jedes U_i bereits auf ganz U_i regulär sein.

$$\omega|_{U_i} \in H^0(U_i, \mathcal{A})$$

Also muss auch für ω gelten:

$$\omega \in H^0(U, \mathcal{A})$$

□

1.2 Reduzierte Paare

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des reduzierten Paares einführen, der notwendig für die Definition von logarithmischen Differentialformen ist. Für nähere Informationen sei auf [Iit82] verwiesen.

Definition 1.2.1. Einen Divisor $D = \sum a_i \Gamma_i$ nennen wir **reduziert**, wenn alle $a_i \in \{0,1\}$ sind. Wir sagen, dass ein reduzierter Divisor $D = \sum_{i=1}^{r} \Gamma_i$ auf einer glatten Varietät V **nur einfache normale Kreuzungspunkte in einem abgeschlossenen Punkt** p hat, wenn es eine Koordinatenumgebung U von p mit lokalen Koordinaten $(z_1, .., z_n)$ gibt, so dass $D \cap U = \sum_{i=1}^{s} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{s} \{z_i = 0\}$.
D hat **auf** Z **nur einfache normale Kreuzungspunkte**, falls D nur einfache normale Kreuzungspunkte in allen $p \in Z$ hat.
Für einen Divisor $D = \sum_{i=0}^{k} a_i D_i$ bezeichne $\operatorname{red} D$, den reduzierten Divisor $\sum_{i=0}^{k} D_i$.

Lemma 1.2.2. *Sei Z eine glatte Varietät und $Z \supset E = \sum_{i=1}^{k} E_i$ ein reduzierter Divisor. Hat E nur einfache normale Kreuzungspunkte, so gilt für jedes $J \subset \{1, ..., k\}$, dass $D_J = \bigcap_{j \in J} E_j$ die disjunkte Vereinigungen von glatten Varietäten mit* $\operatorname{codim}(D_J) = \#J$ *oder $D_J = \emptyset$ ist.*

Beweis. Ist $D_J \neq \emptyset$. Dann existiert für jeden Punkt $P \in D_J$ eine Koordinatenumgebung U_P mit Koordinaten $(z_1, ..., z_n)$ und $E_j = \{z_j = 0\}$ für alle $j \in J$. In U_P ist dann D_J gegeben durch $\{z_j = 0\}_{j \in J}$.
Damit existiert für jeden Punkt $P \in D_J$ eine Umgebung in der D_J glatt ist und $\operatorname{codim}_{U_P}(D_j) = \#J$. □

Definition 1.2.3. Ein **reduziertes Paar**, ist ein Paar (Z, Δ) bestehend aus einer normalen Varietät Z und einem reduzierten, aber nicht zwingend irreduziblen, Weil-Divisor $\Delta \subset Z$.
Ein reduziertes Paar (Z, Δ) ist **logarithmisch glatt**, falls Z glatt ist und Δ nur einfache normale Kreuzungspunkte hat.
Ein **Morphismus** $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ **von reduzierten Paaren** ist ein Morphismus $\gamma : \tilde{Z} \to Z$ mit der Eigenschaft $\operatorname{red}(\gamma^{-1}(\Delta)) = \tilde{\Delta}$.
Für ein reduziertes Paar (Z, Δ) bezeichne mit $(Z, \Delta)_{reg}$ die maximale offene Menge von Z, für die (Z, Δ) logarithmisch glatt ist. Mit $(Z, \Delta)_{sing}$ bezeichnen wir das Komplent von $(Z, \Delta)_{reg}$.
Eine logarithmische Auflölsung eines reduzierten Paares (Z, Δ) ist ein Paar bestehend aus einem logartihmisch glatten Paar $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ und einem birationalen Morphismus $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ mit den Eigenschaften, dass der γ exzeptionelle Ort E nur einfache normale Kreuzungspunkte hat und $\gamma|_{(Z,\Delta)_{reg}}$ ist ein Isomorphismus.

Lemma 1.2.4. *Seien (Z, Δ), (Y, Γ), $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ und $(\tilde{Y}, \tilde{\Gamma})$ reduzierte Paare.*

Ist

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"'] & Z \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit π und γ Morphismen von reduzierten Paaren. Dann ist $\tilde{\gamma}$ genau dann ein Morphismus von reduzierten Paaren, wenn $\tilde{\pi}$ ein solcher ist.

Beweis. Sei $\tilde{\pi}$ ein Morphismus von reduzierten Paaren. Dann gilt nach Definition $\operatorname{red} \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\Delta}) = \tilde{\Gamma}$.
Zu zeigen ist nun, dass $\operatorname{red} \tilde{\gamma}^{-1}(\Gamma) = \tilde{\Gamma}$:

$$\operatorname{red} \tilde{\gamma}^{-1}(\Gamma) = \operatorname{red} \tilde{\gamma}^{-1}(\operatorname{red} \pi^{-1}(\Delta)) = \operatorname{red} \tilde{\pi}^{-1}(\operatorname{red} \gamma^{-1}(\Delta)) = \operatorname{red} \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\Delta}) = \tilde{\Gamma}.$$

Die Umkehrung wird analog gezeigt.

□

Lemma 1.2.5. *Seien Z, $\tilde{Z}$ normale algebraische Flächen und (Z, Δ), $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ reduzierte Paare mit birationalem Morphismus reduzierter Paaren:*

$$\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta).$$

Der einen Divisor E zu endlich vielen Punkten kontrahiert und $E_{\tilde{\Delta}}$ der Teil von E, der keine gemeinsame Komponente mit $\tilde{\Delta}$ hat. Dann gilt:

$$E_{\tilde{\Delta}} \cap \tilde{\Delta} = \emptyset.$$

Beweis. Angenommen $E_{\tilde{\Delta}} \cap \tilde{\Delta} \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma(\tilde{\Delta}) \cap \gamma(E_{\tilde{\Delta}}) \neq \emptyset$. Sei

$$P \in \gamma(\tilde{\Delta}) \cap \gamma(\tilde{E}_{\Delta}).$$

Dann íst nach der Definition von Morphismen reduzierter Paare $P \in \Delta$. Desweiteren ist $\gamma^{-1}(P)$ eine Komponente von $E_{\tilde{\Delta}}$. Somit ist $\gamma^{-1}(P)$ eine Komponente von Δ, und eine Komponente von E_{Δ}.
Dies ist ein Wiederspruch zur Annahme, dass $E_{\tilde{\Delta}}$ und $\tilde{\Delta}$ keine gemeinsamen Komponenten haben.
Somit ist $\tilde{\Delta} \cap E_{\tilde{\Delta}} = \emptyset$. □

Lemma 1.2.6. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein endlich surjektiver Morphismus von logarithmisch glatten Paaren, welcher nur über Δ verzweigt und $\tilde{\Delta} =$*

$\sum \tilde{D}_j$, $\Delta = \sum D_i$.
Dann können wir für jede Komponente D_i *von* Δ *mit*

$$\gamma^*(D_i) = \sum_{l=0}^{k} n_{i_l} \tilde{D}_{i_l}$$

und jeden Punkt $p_i \in D_i$ *eine Umgebung* U_{p_i} *von* p_i*, mit Koordinaten* $(z_0^{p_i}, ..., z_n^{p_i})$*, finden, sodass* $D_i \cap U_{p_i} = \{z_i^{p_i} = 0\}$ *und es für jeden Punkt* $p_k \in \gamma^{-1}(p_i)$ *eine Umgebung* U_{p_k} *von* p_k*, mit Koordinaten* $(\tilde{z}_0^{p_k}, ..., \tilde{z}_n^{p_k})$*, gibt in denen*

$$\gamma^*(D_i)|_{U_{p_k}} = \sum_{m=0}^{r_{p_k}} n_{i_{l_m}} \{\tilde{z}_{i_{l_m}}^{p_k} = 0\}$$

und

$$z_i^{p_i} \circ \gamma|_{U_{p_k}} = (\tilde{z}_{i_{l_0}}^{p_k})^{n_{i_{l_0}}} \cdot ... \cdot (\tilde{z}_{i_{l_{r_{p_k}}}}^{p_k})^{n_{i_{l_{r_{p_k}}}}}$$

Beweis. Da Δ nur einfache normale Kreuzungspunkte hat, existiert für jeden Punkt p_i Umgebung U_{p_i} mit lokalen Koordinaten $(z_0^{p_i}, ..., z_n^{p_i})$, so dass D_i gegeben ist durch $\{z_i^{p_i} = 0\}$.
$\gamma^{-1}(U_{p_i}) =: \tilde{U}_{p_i}$ ist dann eine Umgebung von $\gamma^{-1}(p_i)$ und

$$\gamma^*(D_i)|_{\tilde{U}_{p_i}} = \sum_{l=0}^{k} n_{i_l} \tilde{D}_{i_l}|_{\tilde{U}_{p_i}}$$

Da auch $\tilde{\Delta}$ nur einfache normale Kreuzungspunkte hat existiert für jeden Punkt $p_k \in \gamma^{-1}(p_i)$ eine koordinaten Umgebung U_{p_k} mit Koordinaten $(\tilde{z}_0^{p_k}, ..., \tilde{z}_n^{p_k})$ sodass $\tilde{D}_j \cap U_{p_k} = \{\tilde{z}_j^{p_k} = 0\}$ oder $\tilde{D}_j \cap U_{p_k} = \emptyset$.
Nun ist $U'_{p_k} := U_{p_k} \cap \tilde{U}_{p_i}$ eine Umgebung von p_k und $U'_{p_i} := \gamma(U'_{p_k}) \subset U_{p_i}$ eine Umgebung von p_i für die gilt:

$$U'_{p_i} \cap D_i = \{z_i^{p_i} = 0\}, \ U'_{p_k} \cap \gamma^*(D_i) = \sum_{m=0}^{r_{p_k}} n_{i_{l_m}} \{\tilde{z}_{i_{l_m}}^{p_k} = 0\}$$

und

$$z_i^{p_i} \circ \gamma|_{U_{p_k}} = (\tilde{z}_{i_{l_0}}^{p_k})^{n_{i_{l_0}}} \cdot ... \cdot (\tilde{z}_{i_{l_{r_{p_k}}}}^{p_k})^{n_{i_{l_{r_{p_k}}}}}$$

□

Fakt 1.2.7. *Für jedes reduzierte Paar existiert eine logarithmische Auflösung.*

1.3 logarithmische Differentialformen

Jetzt können wir den zentralen Begriff dieser Arbeit definieren und schon mal ein paar grundlegende Eigenschaften beweisen. Für weitere Informationen siehe [Iit82].

Definition 1.3.1. Sei (Z, Δ) ein logarithmisch glattes Paar. Für jeden Punkt $p \in \Delta$ seien $\Gamma_1, ..., \Gamma_s$ die irreduziblen Komponenten von Δ, die p enthalten. Dann gibt es eine Koordinatenumgebung U_p von p mit Koordinaten $(z_p^1, ..., z_p^n)$, sodass $U_p \cap \Gamma_i = (z_p^i = 0)$. Dieses Koordinatensystem nennt man auch logarithmisches Koordinatensystem entlang Δ an p.
Definiere den **$\mathcal{O}_Z$-Modul der logarithmischen 1-Formen**, $\Omega_Z^1(\log \Delta)$, von Z entlang Δ als den eindeutigen $\mathcal{O}_Z$-Untermodul von $\Omega_Z^1(\Delta) = \Omega_Z^1 \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z(\Delta)$, der folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\Omega_Z^1(\log \Delta)|_{Z \setminus \Delta} = \Omega_Z^1|_{Z \setminus \Delta}$.

2. Für jeden abgeschlossenen Punkt p von Δ gilt

$$\omega_p \in \Omega_Z^1(\log \Delta)|_p \Leftrightarrow \quad \omega_p \in \Omega_Z^1(\Delta)_p \text{ und } \omega_p = \sum_{i=1}^s a_i \frac{dz_p^i}{z_p^i} + \sum_{j=s+1}^n b_j dz_p^j$$

   mit $(z_p^1, ... z_p^n)$ ist ein logarithmisches Koordinatensystem entlang Δ an p und $a_i, b_i \in \mathcal{O}_{Z,p}$.

Bemerkung 1.3.2. Sei (Z, Δ) ein logarithmisch glattes Paar. Dann ist die Garbe der logarithmischen 1-Formen $\Omega_V^1(\log \Delta)$ nach Konstruktion lokal frei.

Notation. Schreibe für Schnitte in $\Omega_Z^1(\log \Delta)$ log-Formen und für Schnitte in $\mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta))$ pluri-log-Formen.

Beispiel 1.3.3. Sei $Z = \mathbb{P}^1$ und $\Delta = [0 : 1]$. Betrachtet die Standardüberdeckung $U_0 := \mathbb{P}^1 \setminus [0 : 1]$, $U_1 := \mathbb{P}^1 \setminus [1 : 0]$ mit lokalen Koordinaten (x_i) und Übergansfunktion $\gamma_{0,1} : x_0 \mapsto \frac{1}{x_0} = x_1$. Da $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \Delta)|_{U_0} = \Omega_{\mathbb{P}^1}^1|_{U_0}$ wird $H^0\left(U_0, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \Delta)\right)$ erzeugt von dx_0. $H^0\left(U_1, \Omega_{\mathbb{P}_1}^1(\log \Delta)\right)$ wird erzeugt von $\frac{1}{x_1}dx_1$.
Insbesondere ist $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \Delta)$ eine invertierbare Garbe.

Fakt 1.3.4. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein Morphismus von logarithmisch glatten reduzierten Paaren, $U \subseteq Z$ eine offene Menge und $\tilde{U} = \gamma^{-1}(U)$. Dann existiert ein natürlicher Rückzug von log-Formen*

$$\gamma^* : H^0\left(U, \Omega^1_Z(log\Delta)\right) \to H^0\left(\tilde{U}, \Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta})\right)$$

und ein dazu assoziierter Garbenmorphismus

$$d\gamma : \underbrace{\gamma^*(\Omega^1_Z(log\Delta))}_{\mathcal{O}_{\tilde{Z}} \otimes_{\gamma^{-1}(\mathcal{O}_Z)} \gamma^{-1}(\Omega^1_Z(\log\Delta))} \to \Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}).$$

Falls γ nicht verzweigt über $Z \setminus \Delta$, so ist $d\gamma$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.3.5. Der Pullbackmorphismus induziert auch einen Pullback von pluri-log-Formen

$$\gamma^* : H^0\left(U, \mathrm{Sym}^n\, \Omega^1_Z(log\Delta)\right) \to H^0\left(\tilde{U}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))\right)$$

und den dazu assoziierten Garbenmorphismus

$$d\gamma^n : \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta))) \to \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta})).$$

Wieder gilt verzweigt γ über $Z \setminus \Delta$ nicht, so ist $d\gamma^n$ ein Isomorphismus.

Beweis. Zuzeigen ist nur, dass $d\gamma^n$ ein isomorphismus ist, falls γ höchstens über Δ verzweigt.
Verzweige also γ über $Z \setminus \Delta$ nicht. Nach Fakt 1.3.4 ist dann $d\gamma^1$ ein Isomorphismus. Wir haben somit eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \gamma^*(\Omega^1_Z(log\Delta)) \xrightarrow{d\gamma^1} \Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}) \to 0 \to 0.$$

Nach [[Har77], Seite 127 Aufgabe 5.16.c] existiert für $\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))$ eine Filtrierung

$$\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta})) = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \ ... \ \supseteq F^n \supseteq F^{n+1} = 0$$

mit $F^i/F^{i+1} \cong Sym^i(\gamma^*(\Omega^1_Z(log\Delta))) \otimes Sym^{n-i}(0)$. Insbesondere ist $F^i = 0$ für $i = 0, ..., n-1$. Es gilt also

$$\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta})) \cong \mathrm{Sym}^n(\gamma^*(\Omega^1_Z(log\Delta))).$$

Und der Isomorphismus ist gegeben durch $d\gamma^n$. $\square$

Satz 1.3.6. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein birationaler Morphismus von logarithmischen glatten reduzierten Paaren mit exzeptionellem Ort $E \subset \tilde{\Delta}$ der von γ zu einer kodimension 2 Menge kontrahiert wird. Dann ist für jede offene Menge $V \subset Z$ mit Urbild $\gamma^{-1}(V) =: \tilde{V}$*

$$\gamma^* : \qquad H^0\left(V, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))\right) \longrightarrow H^0\left(\tilde{V}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))\right)$$

ein Isomorphismus.

Bemerkung. Beachte $\gamma|_{\tilde{V}}$ ist surjectiv.

Beweis. Zur Surjektivität:
Sei $\omega \in H^0\left(\tilde{V}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))\right)$ beliebig. Da $\gamma|_{\tilde{V}}$ surjectiver birationaler Morphismus, mit exzeptionellem Ort E, ist, existiert auf $\tilde{V} \setminus E$ ein Umkehrmorphismus $\psi := (\gamma|_{\tilde{V}\setminus E})^{-1}$. Nun betrachte

$$\omega' := \psi^*(\omega|_{\tilde{V}\setminus E}) \in H^0\left(V \setminus \gamma(E), \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{V\setminus\gamma(E)}(\log \Delta))\right).$$

Da $\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))$ lokal frei und $\mathrm{codim}_Z(\gamma(E)) \geq 2$ ist, können wir mit dem zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz ω' zu einer Form

$$\tilde{\omega}' \in H^0\left(V, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))\right)$$

fortsetzen.
Nun ist $\tilde{\omega} := \gamma^*(\tilde{\omega}') \in H^0\left(\tilde{V}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))\right)$ und

$$\tilde{\omega}|_{\tilde{V}\setminus E} = \omega|_{\tilde{V}\setminus E}$$

Da $\mathrm{codim}(E) \geq 1$ und $\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{V}}(\log \tilde{\Delta}))$ lokal frei ist, gilt $\gamma^*(\tilde{\omega}') = \tilde{\omega} = \omega$.
Zur Injektivität:
Seien $\omega',\ \omega \in H^0\left(V, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))\right)$ mit $\gamma^*(\omega') = \gamma^*(\omega)$. Auf $\tilde{V} \setminus E$ kann das Bild von ω' und ω wieder zurück gezogen werden und erhält

$$\omega'|_{V\setminus\gamma(E)} = \psi^*(\gamma^*(\omega')|_{\tilde{V}\setminus E}) = \psi^*(\gamma^*(\omega)|_{\tilde{V}\setminus E}) = \omega|_{V\setminus\gamma(E)}.$$

Da $\mathrm{codim}\{\gamma(E)\} \geq 2$ ist muss bereits $\omega' = \omega$ sein.

□

Lemma 1.3.7. *Sei P ein Punkt in $\mathbb{P}^1$. Dann hat $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}(\log P)$ keine globalen Schnitte.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $P = [0 : 1]$ und $U_0,\ U_1$ wie in Beispiel 1.3.3. Angenommen $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}(\log P)$ hätte einen globalen Schnitt ω. Dann können wir ω auf U_1 schreiben als

$$\omega|_{U_1} = -c \cdot \frac{1}{x_1} \cdot dx_1,$$

mit $c \in \mathbb{C}$ konstant. Dann aber ist

$$\omega|_{U_0} = \gamma^*_{0,1}(\omega)|_{U_1} = c \cdot x_0 \cdot d(\frac{1}{x_0}) = c \cdot \frac{1}{x_0} dx_0$$

Dies ist ein Wiederspruch, da $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}$ auf U_0 erzeugt wird von dx_0 und $c \cdot \frac{1}{x_0}$ offensichtlich nicht regulär ist.

Kapitel 2

Fortsetzbarkeit von log-Formen

2.1 Aufblasungen Glatter Flächen

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel:

Beispiel 2.1.1. Sei $Z := \{((x_1, x_2), [y_1 : y_2]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 | x_1 y_2 = x_2 y_1\}$ die Aufblasung des $\mathbb{A}^2$ im Nullpunkt mit exzeptionellem Ort E. Betrachte die Standardüberdeckung von Z mit affinen Karten U_0 und U_∞ und Koordinaten (x_i, y_i), und der Koordinaten-Übergangsfunktion

$$\phi_{0,\infty} : (x_0, y_0) \to (\frac{1}{x_0}, x_0 y_0) = (x_\infty, y_\infty)$$

Dann ist $E|_{U_i} = \{y_i = 0\}$.
Wählen ein $\omega \in H^0(Z, \Omega^1_Z(*E))$.
Nun können wir ω eingeschränkt auf U_∞ wie folgt schreiben:

$$\omega|_{U_\infty} = \frac{1}{y_\infty^n}(\sum a_{ij} x_\infty^i y_\infty^j) dy_\infty + (\sum b_{kl} x_\infty^k y_\infty^l) dx_\infty$$

mit $a_{i,j},\ b_{k,l} \in \mathbb{C}$ und nur endlich viele ungleich Null.
Betrachten wir andererseits die Einschränkung auf U_0, so gilt:

$$\begin{aligned}
\omega|_{U_0} = \phi^*_{0,\infty}(\omega|_{U_\infty}) &= (\sum a_{ij} x_0^{j-i-n} y^{j-n}) dx_0 y_0 + (\sum b_{kl} x_0^{l-k} y_0^l) d\tfrac{1}{x_0} \\
&= (\sum a_{ij} x_0^{j-i-n+1} y_0^{j-n}) dy_0 + \\
&\quad (\sum a_{ij} x_0^{j-i-n} y_0^j - \sum b_{kl} x_0^{l-k-2} y_0^l) dx_0
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $j - n \geq 0$ gelten muss, da sonst ω bei $\{x_0 = 0\}$ einen Pol haben würde. Das heißt es existiert keine Differentialform

$$\omega \in H_0(Z, \Omega^1_Z(*E)) \setminus H_0(Z, \Omega^1_Z).$$

Wir können also jede Differentialform $\omega \in H_0(Z \setminus E, \Omega^1_{Z\setminus E})$ zu einer Form $\tilde{\omega} \in H_0(Z, \Omega^1_Z)$ fortsetzen.

Wir werden nun zeigen, dass man Differentialformen, die entlang eines Divisors E beliebige Pole haben darf, zu einer regulären Differentialform fortsetzen kann, falls E zu einer Kodimension 2 Menge auf einer glatten Varietät kontrahierbar ist.

Satz 2.1.2. *Seien Z, $\tilde{Z}$ glatte Varietäten und $\gamma : \tilde{Z} \to Z$ ein birationaler Morphismus mit exzeptionellem Ort E der zu einer kodimension mindestens 2 Menge kontrahiert wird.*
Dann gilt für jede offene Menge $V \subset Z$ mit Urbild $\tilde{V} := \gamma^{-1}(V)$, dass jedes $\omega \in H^0\left(\tilde{V} \setminus E, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{V}\setminus E}\right)$ zu einer Form

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{V}, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{V}}\right)$$

fortgesetzt werden kann.

Beweis. Sei $V \subset Z$ mit Urbild $\tilde{V} := \gamma^{-1}(V)$ und $\omega \in H^0\left(\tilde{V} \setminus E, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{V}\setminus E}\right)$ beliebig.
Da γ auf $\tilde{V} \setminus E$ ein Isomorphismus algebraischer Varietäten ist, existiert ein Umkehrmorphismus $(\gamma|_{\tilde{V}\setminus E})^{-1} =: \psi$. Mit diesem kann ω zu einer Form

$$\omega' := \psi^*(\omega) \in H^0\left(V \setminus \gamma(E), \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{V\setminus\gamma(E)}\right),$$

die ausserhalb von $\gamma(E)$ definiert ist, zurückgezogen werden.
Nach Vorraussetzung gilt für E:

$$\operatorname{codim}_{\tilde{Y}}(\gamma(E)) \geq 2$$

Desweiteren ist Ω^1_V eine lokal freie $\mathcal{O}_Y$-Garbe. Nach Lemma 1.1.5 existiert eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega'} \in H^0\left(V, \Omega^1_V\right)$$

von ω' auf ganz V. Diese können wir mit γ^* zu einer Form

$$\tilde{\omega} := \gamma^*(\tilde{\omega'}) \in H^0\left(V, \Omega^1_V\right)$$

zurückziehen, welche auf $\tilde{V} \setminus E$ mit ω übereinstimmt, das heißt

$$\tilde{\omega}|_{\tilde{V}\setminus E} = \gamma^* \circ \psi^*(\omega) = \omega.$$

$\square$

Dieses Ergebniss lässt sich für birationale Morphismen von reduzierten Paaren verallgemeinern.

Satz 2.1.3. *Seien* (Z, Δ), $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ *logarithmisch glatte reduzierte Paare und* $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ *ein birationaler Morphismus von reduzierten Paaren mit exzeptionellen Ort* E *der von* γ *zu einer kodimension 2 Menge kontrahiert wird.*
Sind Z, $\tilde{Z}$ *glatte Varietäten, dann gilt für jede offene Menge* $U \subset Z$ *mit Urbild* $\tilde{U} := \gamma^{-1}(U)$*, dass jedes*

$$\omega \in H^0\left(\tilde{U} \setminus E, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}\setminus E}(log\tilde{\Delta}))\right)$$

auf ganz $\tilde{U}$ *fortgesetzt werden kann, das heißt es existiert*

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{U}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}}(log\tilde{\Delta}))\right)$$

mit $\tilde{\omega}|_{\tilde{U}\setminus E} = \omega$.

Beweis. Setze $\psi = (\gamma|_{\tilde{U}\setminus E})^{-1}$. Dann ist

$$\omega' = \psi^*(\omega) \in H^0\left(U \setminus \gamma(E), \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{U\setminus\gamma(E)}(log\Delta))\right)$$

Nach Satz 1.3.6 genügt es eine Fortsetzung $\tilde{\omega}'$ von ω' auf ganz U zu finden. Da $\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_U(log\Delta))$ lokal frei und $\mathrm{codim}_U(\gamma(E)) \geq 2$ ist, finden wir wie im Beweis zu Satz 2.1.2 mit Lemma 1.1.5 eine Fortsetzung $\tilde{\omega}$ von ω' auf ganz U. □

2.2 Fortsetzbarkeits-Theorem (Kebekus, Kovaćs)

Das folgende Beispiel wird zeigen, dass wir die Bedingung an Z glatt zu sein nicht ohne weiteres weglassen können.

Beispiel 2.2.1. Sei $\tilde{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ und E der Nullschitt. Dann gib es einen birationalen Morphismus γ und eine singuläre Fläche Z mit $\gamma^{-1}(Z_{sing}) = E$. Sei U_0, U_∞ die Standardüberdeckung von $\tilde{Z}$ mit $U_i \simeq \mathbb{A}^2$, Koordinaten (x_i, y_i) und Koordinatenübergang

$$\phi_{0,\infty} : (x_0, y_0) \to (\frac{1}{x_0}, x_0^2 y_0) = (x_\infty, y_\infty)$$

Die Bündelabbildung ist dann gegeben durch $(x_i, y_i) \to x_i$ und der Nullschnitt hat lokal die Form $\{y_i = 0\}$. Betrachten wir

$$\omega_\infty = \frac{1}{y_\infty}(dy_\infty)^2 \in H^0\left(U_\infty, Sym^2\Omega^1_{U_\infty}(*E)\right) \setminus H^0\left(U_\infty, Sym^2\Omega^1_{U_\infty}\right)$$

Diese Form setzt sich zu einer Form

$$\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, Sym^2\Omega^1_{\tilde{Z}}(*E)\right) \setminus H^0\left(\tilde{Z}, Sym^2\Omega^1_{\tilde{Z}}\right)$$

fort, da

$$\omega|_{U_0} = \frac{x_o^2}{y_0}(dy_0)^2 + 4x_0y_0(dy_0dx_0) + 4y_0(dx_0)^2 \in (Sym^2\Omega^1_{U_0\setminus E} \setminus Sym^2\Omega^1_{U_0})$$

Satz 2.1.2 ist also ohne die Bedingung, dass Z glatt ist falsch. Wir können aber eine obere Schranke für die Polstellenordnung angeben, die eine Differentialform ω entlang eines kontrahierbaren Divisors E haben kann.

Lemma 2.2.2. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein endlich surjektiver Morphismus der nur über Δ verzweigt. Sei $E \subset Z$ ein effektiver Divisor und $\omega \in H^0\left(Z, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta))(*E)\right)$ eine pluri-log-Form, die entlang E mehr als logarithmische Pole haben darf.*
Fordert wir zusätzlich, dass γ über $Z \setminus \Delta$ nicht verzweigt, so hat ω keine Pole als pluri-log-Form, das heißt

$$\omega \in H^0\left(Z, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta))\right)$$

genau dann, wenn $\gamma^*(\omega)$ keine Pole als pluri-log-Form hat, also wenn

$$\gamma^*(\omega) \in H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))\right).$$

Beweis. Sei $\omega \in H^0\left(Z, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta))\right)$. Wir können ω auch als Schnitt in $\gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z)(\log\Delta))$ auffassen, also:

$$\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta)))\right).$$

Da γ höchstens über Δ verzweigt gilt nach Fakt 1.3.4 und Bemerkung 1.3.5.

$$\gamma^* : H^0\left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta)))\right) \to H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))\right).$$

ist ein Isomorphismus. Damit ist:

$$\gamma^*(\omega) \in H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta)))\right).$$

Sei nun $\omega \in H^0\left(Z, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta)(*E))\right)$ mit

$$\gamma^*(\omega) \in H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(log\tilde{\Delta}))\right).$$

Dann ist $\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta)))\right)$. Das heißt ω kann als pluri-log-Form keine Pole entlang E haben, also

$$\omega \in H^0\left(Z, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(log\Delta))\right).$$

□

Definition 2.2.3. Ein reduziertes Paar (Z, Δ) heißt *endlich dominiert von glatten analytischen Paaren* wenn folgendes gilt:
Für jeden Punkt $z \in Z$ gibt es eine analytisch Umgebung U_z und ein logarithmisch glattes Paar $(\tilde{U}, \tilde{\Delta})$, mit einem endlich surjektiven Morphismus $\gamma : (\tilde{U}, \tilde{\Delta}) \to (U_z, \Delta \cap U_z)$ von reduzierten Paaren.

Beispiel 2.2.4. Sei Z, eine Varietät die höchstens Quotientensingularitäten hat. Dann ist $(Z, \emptyset)$ endlich dominiert von glatten analytischen Paaren. Denn sei $z \in Z$ beleliebig. Ist $z \in (Z, \emptyset)_{reg}$ so ist die Aussage klar. Also sei ohne Einschränkung $z \in (Z, \emptyset)_{sing}$, dann existiert eine Umgebung U von z, eine glatte Varietät $\tilde{Z}$ und eine endliche Gruppe G die auf $\tilde{Z}$ operiert, sodass $U \simeq \tilde{Z}/G$. Das heißt es existiert ein endlich surjektiver Morphismus $(\tilde{Z}, \emptyset) \to (U, \emptyset)$.

Definition 2.2.5. Sei $\gamma : \tilde{Z} \to Z$ ein endlicher surjektiver Morphismus. Dann heißt die maximale Kodimension-1-Menge $B \subset Z$, mit γ verzweigt über B, der **Verzweigungsdivisor** von γ.

Der folgende Satz wurde 2007 von Kebekus und Kovaćs bewiesen:

Satz 2.2.6 (Fortsetzbarkeits-Theorem)**.** *Sei (Z, Δ) ein reduziertes Paar, mit logarithmischer Auflösung $\pi : (Y, \Gamma) \to (Z, \Delta)$ und exzeptionellem Ort E. Wird (Z, Δ) von glatten analytischen Paaren dominiert, so gilt für jede offene Menge $U \subset Z$ mit Urbild $V := \pi^{-1}(U)$, dass für jedes*

$$\omega \in H^0\left(V \setminus E, \mathrm{Sym}^n\, \Omega^1_{V\setminus E}(log\Gamma)\right),$$

also für jede pluri-log-Form die außerhalb des π-exzeptionellen Ortes E definiert ist, eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(V, \mathrm{Sym}^n\, \Omega^1_V(log(\Gamma + E_\Gamma))\right)$$

auf ganz V existiert. Dabei ist E_Γ der Teil des exzeptionellen Ortes, der nicht in Γ liegt.

Beweis. Da $\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_V(log\Gamma))$ eine lokal freie Garbe ist, ist das Problem der Fortsetzbarkeit von pluri-log-Formen analytisch lokal.(1)
Nach Vorraussetzung gibt es eine analytisch offene Überdeckung U_i von (Z, Δ) mit logarithmisch glatten Paaren $(\tilde{Z}_i, \tilde{\Delta}_i)$ und endlichen surjektiven Morphismen

$$\gamma_i : (\tilde{U}_i, \tilde{\Delta}_i) \to (U_i, \Delta \cap U_i).$$

Sei $U \subset Z$ und $\omega \in H^0\left(V \setminus E, \mathrm{Sym}^n \Omega^1_{V\setminus E}(log\Gamma)\right)$ beliebig.
Wegen (1) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass es einen endlichen surjektiven Morphismus

$$\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$$

eines logarithmisch glatten Paares $(\tilde{Z}, \tilde{\Gamma})$ gibt. Sei $\tilde{Y}$ die Normalisierung des Faserproduktes $Y \times_Z \tilde{Z}$ und $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{Y}$ das reduzierte Urbild von Γ. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y}, \tilde{\Gamma}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & (Y, \Gamma) \arrow[d, "\pi"] \\
(\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \arrow[r, "\gamma"'] & (Z, \Delta).
\end{tikzcd}$$

Dabei sind γ und $\tilde{\gamma}$ endlich surjektive Morphismen und π birational mit exzeptionellen Ort E. Setze

$$\tilde{E} := red(\tilde{\gamma}^{-1}(E)) = red(((\gamma \circ \pi)^{-1} \circ \pi(E))) = red(((\gamma \circ \pi)^{-1}(Z, \Delta)_{sing}))$$

Sei B der Verzweigungsdivisor von γ und $\pi_*^{-1}(B)$ seine strikte Transformierte. Setze $V' := V \setminus (\pi_*^{-1}(B) \cup E \cup \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Gamma})_{sing}))$. Dann gilt für $\omega|_{V'}$:

$$\tilde{\gamma}^*(\omega|_{V'}) \in H^0\left(\gamma^{-1}(V'), \mathrm{Sym}^n \Omega^1_{\gamma^{-1}(V')}(log\tilde{\Gamma})\right).$$

Es gilt

$$\gamma^{-1}(V') = \underbrace{red(\gamma^{-1}(V \setminus \pi_*^{-1}(B)))}_{=:\tilde{V}} \setminus \tilde{E} = \tilde{V} \setminus \tilde{E}$$

und $\tilde{V}$ ist offene Menge in $\tilde{Y}$. Nach Konstruktion wird $\tilde{E}$ durch $\tilde{\pi}$ zu glatten Punkten auf $\tilde{Z}$ kontrahiert. Nach Satz 2.1.3 existiert daher eine Fortsetzung

$$\overline{\omega} \in H^0\left(\tilde{V}, \mathrm{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{V}}(log\tilde{\Gamma})\right).$$

von $\tilde{\gamma}^*(\omega|_{V'})$ auf ganz $\tilde{V}$. Insbesondere ist $\overline{\omega}$ in $H^0\left(\tilde{V}, \mathrm{Sym}^n\, \Omega^1_{\tilde{V}}(log(\tilde{\Gamma}+\tilde{E}_{\tilde{\Gamma}}))\right)$.
Da $\tilde{\gamma}$ nach Konstruktion nicht verzweigt über $V \setminus (\pi_*^{-1}(B) \cup \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing}))$, existiert nach Lemma 2.2.2 eine Fortsetzung

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega} \in H^0\left(\overline{V}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\overline{V}}(log(\Gamma + E_\Gamma)))\right)\\ &\text{mit}\\ &\overline{V} := V \setminus (\pi_*^{-1}(B) \cup \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing})\end{aligned}$$

von $\omega|_{V'}$.
Damit haben wir eine Fortsetzung von ω auf

$$V \setminus \underbrace{(E \cap (\pi_*^{-1}(B) \cup \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing})))}_{=:E_0}$$

gefunden.
Können wir jetzt noch zeigen, dass $\mathrm{codim}_Y(E^0) \geq 2$ ist erhalten wir mit Lemma 1.1.5 eine Fortsetzung auf ganz V. Das heißt es muss noch folgendes gezeigt:

$$\begin{aligned}2 &\leq \mathrm{codim}_Y(E \cap (\pi_*^{-1}(B) \cup \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing})))\\ &= min\{\mathrm{codim}_Y(E \cap \pi_*^{-1}(B)), \mathrm{codim}_Y(E \cap \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing}))\}.\end{aligned}$$

Da $\tilde{Y}$ eine normale Varietät ist, ist $\mathrm{codim}_{\tilde{Y}}((\tilde{Y}, \tilde{\Gamma})_{sing}) \leq 2$. Insbesondere ist

$$\mathrm{codim}_Y(E \cap \tilde{\gamma}((\tilde{Y}, \tilde{\Delta})_{sing})) \leq 2,$$

da $\tilde{\gamma}$ ein endlicher Morphismus ist.
E und $\pi_*^{-1}(B)$ sind Divisoren, also ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{codim}_Y(E) &\geq 1\\ \mathrm{codim}_Y(\pi_*^{-1}(B)) &\geq 1 \quad .\end{aligned}$$

Da E und $\pi_*^{-1}(B)$ nach Konstruktion keine gemeinsame Komponente haben muss

$$\mathrm{codim}_Y(E \cap \pi_*^{-1}(B)) \geq 2,$$

sein.
Damit gibt es eine Fortsetzung von ω auf ganz V.

□

Kapitel 3

Fortsetzbarkeit von 1-Formen auf Auflösungen von Quotientensingularitäten

3.1 Das Arithmetische Geschlecht

Für das Folgende Kapitel brauchen wir den Begriff des arithmetischen Geschlechts und einige Eigenschaften dieses. Für die Beweise, die hier nicht aufgeführt werden und für weitere Eigenschaften wird der Leser auf [Rei97] verwiesen.

Definition 3.1.1. Sei D ein effektiver Divisor auf einer glatten Fläche X dann definiere das **arithmetische Geschlecht** $p_a(D)$ von D durch die folgende Gleichung:

$$2p_a(D) - 2 = (K_X + D).D.$$

Bemerkung 3.1.2. Ist D eine glatte Kurve auf einer glatten Fläche X, dann ist $p_a(D) = g(D)$. Wobei $g(D)$ das Geschlecht von D ist.

Beweis. Nach [Har77] gilt für glatte Kurven D auf glatten Flächen X die Adjunktionsformel:

$$2g - 2 = (K_X + D).D.$$

Insbesondere ist $p_a(D) = g(D)$. □

Definition 3.1.3. Nenne eine Menge verschiedener Kurven $D_1, ...D_k$ einen **Ring**, wenn für $i \neq j$ gilt:

$$\begin{aligned} &D_i.D_j > 0, \text{ falls } j = i \pm 1 \\ &D_i.D_j > 0, \text{ falls } (i,j) = (1,k); (k,1) \\ &D_i.D_j = 0, \text{ sonst }. \end{aligned}$$

Satz 3.1.4. *Für das arithmetische Geschlecht eines Ringes D aus k glatten rationalen $(-n_i)$-Kurven D_i auf einer glatten Fläche X gilt*

$$p_a D > 0$$

Beweis. Nach Bemerkung 3.1.2 gilt $p_a D_i = g(D_i) = 0$ daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} -2 &= (K_X + D_i).D_i \\ \Rightarrow \quad K_X.D_i &= n_i - 2 \end{aligned}$$

Mit der Tatsache, dass D ein Ring von Kurven ist, können wir nun das arithmetische Geschlecht wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} 2p_a D - 2 &= (K_X + D).D \\ &= K_X.(\sum_{i=1}^{k} D_i) + (\sum_{j=1}^{k} D_j).(\sum_{i=1}^{k} D_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(n_i - 2) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{D_i.D_{i+1}}_{\geq 1} + 2 \cdot \underbrace{D_1.D_n}_{\geq 1} + \sum_{i=1}^{k} D_i.D_i \\ &\geq -2k + 2k \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p_a D > 0$ □

Fakt 3.1.5 (siehe [Rei97], Bemerkung, Seite 90)**.** *Sei Z eine Fläche mit einer Singularität P, und sei Y eine Auflösung von Z mit birationalem Morphismus π und exzeptionellen Ort $E = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *P ist rationale Singularität und*
2. *für alle effektiven Divisoren $D = \sum a_j E_j$ mit $a_j E_j \subset \pi^{-1}(P)$ gilt*

$$p_a(D) \leq 0.$$

3.2 Desingularisierungen von Quotientensingularitäten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Auflösungen von Quotientensingularitäten und den Eigenschaften ihrer exzeptionellen Orten. Das zentrale

Hilfsmittel in diesem Abschnitt wird das Auflösungsdiagramm für Quotientensingularitäten sein.
Sei Z eine Fläche mit einer Quotientensingularität p und Y eine Auflösung, mit exzeptionellen Ort der nur einfache normale Kreuzungspunkte hat. Dann existiert für p eine analytische Umgebung U_p eine glatte Fläche $\tilde{Z}$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \pi^{-1}(U_p) \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"'] & U_p \end{tikzcd}$$

Mit $\tilde{Y}$ ist die normalisierung des Faserprodukts $\tilde{Z} \times_{U_p} \pi^{-1}(U_p)$, und γ ist endlich surjektiver Morphismus der durch eine Gruppen Operation auf $\tilde{Z}$ gegeben ist.
Da das Problem der Fortsetzbarkeit von Differentialformen ein lokales Problem ist können wir ohne Einschränkung annehmen, dass das obige Diagramm für ganz Z gilt also:

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"'] & Z \end{tikzcd}$$

Desweiteren brauchen wir noch einige Fakten über birationale Morphismen zwischen normalen Flächen diese können in ([Har77], Kapitel 5) nachgelesen werden.

Lemma 3.2.1. *Seien Z, Y, $\tilde{Z}$ und $\tilde{Y}$ wie im Auflösungsdiagramm und E der exzeptionelle Ort von π. Dann ist $\tilde{E} = \tilde{\gamma}^{-1}(E) \subset \overline{\tilde{Z} \times_Z Y}$ eine Menge von rationalen Kurven.*

Beweis. Da $\tilde{\pi}$ ein birationaler Morphismus zwischen einer glatten Fläche $\tilde{Z}$ und einer normalen Fläche $\tilde{Y}$ ist, faktorisiert $\tilde{\pi}$ über endlich viele monoidale Transformationen (siehe [Har77] Kapitel V).
Damit folgt, dass der exzeptionelle Ort $\tilde{E}$ von $\tilde{\pi}$ eine endliche Vereinigung Rationaler Kurven ist.

Lemma 3.2.2. *E ist endliche Vereinigung glatter rationaler Kurven.*

Fakt 3.2.3 ([Rei97])**.** *Quotientensingularitäten sind ratinale Singularitäten.*

Beweis (Lemma 3.2.2)**.** Zunächst besteht E nur aus glatten Kurven, da es der exzeptionelle Ort einer logarithmischen Auflösung ist, und daher nur einfache normale Kreuzungspunkte hat.
Die Aussage das E nur aus rationalen Kurven besteht ist äquivalent dazu, dass das Geschlecht $g(E_i)$ für jede Komponente E_i von E Null ist.
Nach Fakt 3.2.3 wird E durch π zu einer rationalen Singularität auf Z kontrahiert. Nach Fakt 3.1.5 gilt dann für jede reduzierte Komponente E_i von E, dass

$$p_a(E_i) \leq 0.$$

Wir haben schon gezeigt, dass E nur aus glatten Kurven besteht also muss

$$g(E_i) = p_a(E_i) \geq 0$$

sein, und somit $g(E_i) = 0$ □

Satz 3.2.4. *Ist Y eine Auflösung einer Quotientensingularität Z mit exzeptionellen Ort E, der nur einfache normale Kreuzungspunkte hat. Dann ist E ein Ring-freier zusammenhängender Divisor glatter rationaler Kurven.*

Beweis. Mit Korrolar 3.2.2 wissen wir bereits, dass E eine endliche Vereinigung glatter rationaler Kurven ist. Da π die Aufblasung einer einzelnen Quotietensingularität ist, ist E zusammenhängend.
Bleibt also zu zeigen, dass E keine Ringe enthält:
Angenommen E wäre nicht Ring-frei, dass heißt es existieren $E_{i_1}, ..., E_{i_l}$ die einen Ring bilden. Betrachte den Divisor:

$$D = \sum_{j=1}^{l} E_{i_j}.$$

Da E nur aus glatten rationalen Kurven mit negativem Selbstschnitt besteht, gilt nach Satz 3.1.4

$$p_a(D) > 0.$$

Andererseits wird E mit π zu einer rationalen Singularität kontrahiert. Nach Fakt 3.1.5 gilt aber, dass

$$p_a(D) \leq 0$$

Somit kann E keine Ringe enthalten. □

Notation. Einen Ring freien zusammenhängenden reduzierten Divisor auf einer glatten Fläche bezeichnen wir mit **Baum**.

Lemma 3.2.5. *Sei $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ ein Baum aus glatten rationalen Kurven und $n > 1$, der nur einfache normale Kreuzungspunkte hat. Dann existiert eine irreduzible Komponente E_i von E, die $E - E_i$ genau einmal transversal schneidet.*

Beweis. Da E nur einfache normale Kreuzungspunkte hat schneidet jede Komponente E_i von E ihr Komplement $E - E_i$ transversal. Daher genügt es zu zeigen, dass es eine Komponente E_i gibt, die $E - E_i$ nur einmal schneidet. Dazu gehen wir wie folgt vor:
Betrachte E_1. Ist der Schnitt von E_1 mit $E - E_1$ nur ein Punkt, so sind wir fertig. Enthält $E_1 \cap (E - E_1)$ mehr als nur einen Punkt, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$
Betrachte nun E_2. Ist der Schnitt von E_2 mit $E - E_2$ wieder nur ein Punkt, so sind wir fertig. Angenommen $E_2 \cap E - E_2$ enthält mehr als nur einen Punkt. Da E keine Ringe enthält kann E_2 nur einen Schnittpunkt mit E_1 haben. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass E_2 und E_3 einen Schnittpunkt haben.
Induktiv und mit der Tatsache, dass E keine Ringe enthält folgt dann:
Enthält $E_i \cap E - E_i$ mehr als nur einen Punkt, so schneiden sich E_i und $E_i + 1$ in einem Punkt. Da $n < \infty$ ist muss das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen. □

Lemma 3.2.6. *Sei E wie oben. Durch Umnummerierung können wir erreichen, dass für alle $i = 1, ..., n-1$ der Schnitt von E_i mit $E - \sum_{j=1}^{i} E_j$ genau ein Punkt ist.*

Beweis. Da E ein Baum glatter rationaler Kurven mit nur einfachen normalen Kreuzungspunkten ist existiert nach Lemma 3.2.5 eine irreduzible Komponente E_i von E, welche $E - E_i$ in genau einem Punkt schneidet. Durch umnummerieren können wir ohne Einschränkung annehmen, dass diese irreduzible Komponente E_1 ist.
Setze $E^1 = E - E_1$. Da E keine Ringe enthält, ist auch E^1 ringfrei. Außerdem ist E^1 immernoch ein zusammenhängender Baum glatter rationaler Kurven. Ohne Einschränkung kann also wieder Angenommen werden, dass E_2 mit $E^1 - E_2 = E - (E_1 + E_2)$ genau einen Schnittpunkt hat.
Die Behauptung folgt dann induktiv mit E^{i-1} wieder ein Baum und E_i schneidet $E^{i-1} - E_i = E - \sum_{j=1}^{i} E_i$ in genau einem Punkt.

3.3 Fortsetzbarkeit von 1-Formen

Seien Z, Y, $\tilde{Z}$ und $\tilde{Y}$ wie in Abschnitt 3.1. In diesem Abschnitt wollen wir 1-Formen auf Y betrachten, die mehr als Logarithmische Pole entlang des π

exzeptionellen Ortes E haben dürfen. Insbesondere soll es um die Fortsetzbarkeit solcher Formen gehen.

Lemma 3.3.1. *Sei (Y, E) ein logarithmisch glattes Paar, mit $E = \sum E_i$ und*

$$i : E_1 \hookrightarrow Y$$

die Einbettung von E_1 in Y. Dann existiert exakte Sequenz:

$$0 \to \mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_Y(\log E) \xrightarrow{\phi_1} \Omega^1_Y(\log(E - E_1)) \xrightarrow{\phi_2} i_*(\Omega^1_{E_1}((\log(E - E_1))|_{E_1})) \to 0.$$

Beweis (siehe [EV92]). ϕ_1 ist die Inklusion, da

$$\mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_Y(\log E) \subset \Omega^1_Y(\log(E - E_1))$$

Es bleibt zu zeigen, dass ϕ_2 surjektiv mit Kern$(\phi_2) = \mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_Y(\log E)$ ist. Da ϕ_2 genau dann surjektiv ist, wenn es auf den Keimen surjektiv ist, genügt es ϕ_2 auf Keimen anzugeben.
Dazu seien $p \in Y$ beliebig und $\omega_p \in \Omega^1_Y(\log E - E_1)|_p$ dann ist:

$$\omega_p = \sum a_i \frac{1}{x_i} dx_i + \sum b_i dy_i,$$

mit logarithmischen Koordinatensystem $(x_1, ..., x_n)$, $A_i, b_i o \in \mathcal{O}_{Y,p}$ und $a_1 \equiv 0$ auf $\{x_1 = 0\}$. Dann definiere

$$\phi_2(\omega_p) = \sum_{i \geq 2} (a_i \frac{1}{x_i} dx_i)|_{E_1} + \sum (b_i dy_i)|_{E_1}.$$

Es ist ersichtlich, dass ϕ_2 surjektiv ist und

$$Kern(\phi_2) = \mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_Y(\log E).$$

□

Korollar 3.3.2. *Sei (Y, E) wie in Lemma 3.3.1 und sei $E^j = \sum_{i=1}^j E_i$ und*

$$i : E_j \hookleftarrow Y$$

die Eionbettung. Dann ist folgende Sequenz exakt

$$\mathcal{I}_{E^j} \otimes \Omega^1_Y(\log E) \hookrightarrow \mathcal{I}_{E^{j-1}} \otimes \Omega^1_Y(\log(E - E_j)) \twoheadrightarrow i_* I_{E^{j-1}} \otimes \Omega^1_{E_j}((\log(E - E_j))|_{E_j}).$$

Lemma 3.3.3. *Seien $\tilde{Y}$, Y glatte Varietäten und $\gamma : \tilde{Y} \to Y$ ein endlicher surjektiver Morphismus, der nur über einem reduzierten Divisor $E \subset V$ mit einfachen normalen Kreuzungspunkten verzweigt. Dann gilt für jede offene Menge*
$V \subset Y$ mit Urbild $\tilde{V} := \gamma^{-1}(V)$

$$\begin{array}{rcl} \omega & \in & H^0\left(V, \Omega^1_Y(\log E)\right) \setminus H^0\left(V, \Omega^1_Y\right) \\ \Rightarrow \ \gamma^*(\omega) & \in & H^0\left(\tilde{V}, \Omega^1_{\tilde{Y}}(\log \gamma^{-1}(E))\right) \setminus H^0\left(\tilde{Y}, \Omega^1_{\tilde{Y}}\right). \end{array}$$

Beweis. Da $E = \sum_{i=1}^k E_i$ nur einfache normale Kreuzungspunkte hat, finden wir eine offene Überdeckung U_l mit logarithmischen Koordinaten $(x_1^l, ..., x_n^l)$ von V. Auf jeder dieser offenen Mengen ist

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i^l \frac{1}{x_i^l} dx_i^l + \sum_{j=m+1}^{n} b_j^l dx_j^l$$

mit a_i^l, b_j^l reguläre Funktionen auf V. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1^l|_{x_1^l=0} \not\equiv 0$, da $\omega \in H^0\left(V, \Omega^1_Y(\log E)\right) \setminus H^0\left(V, \Omega^1_Y\right)$. Dann gilt auf $\gamma^{-1}(U_l)$

$$\gamma^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} (a_i^l \circ \gamma) \frac{1}{\gamma_i^l} d\gamma_i^l + \sum_{j=k+1}^{n} (b_j^l \circ \gamma) d\gamma_j^l$$

mit $\gamma_k^l = x_k^l \circ \gamma$, und

$$(a_1^l \circ \gamma)|_{(\gamma_1^l=0)} \not\equiv 0.$$

Somit hat $\gamma^*(\omega)$ einen Pol. □

Lemma 3.3.4. *Sei $\pi : Y \to Z$ eine Auflösung einer Quotientensingularität mit exzeptionellen Ort E der nur einfache normale Kreuzungspunkte hat. Dann gilt für jede offene Menge $V \subset Z$ mit Urbild $U = \pi^{-1}(V)$, dass für jedes $\omega \in H^0\left(U \setminus E, \Omega^1_{U \setminus E}\right)$ eine Fortsetzung*

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U, \Omega^1_U\right)$$

auf ganz U existiert.

Beweis. Für den Beweis betrachte nochmals das Auflösungsdiagramm von Z:

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"'] & Z, \end{tikzcd}$$

mit γ endlicher surjektiver Morphismus.
Sei $\tilde{E}$ das reduzierte Urbild von E, $B \subset Z$ der Verzweigungsdivisor von γ mit strikter Transformierter $\tilde{B} = \pi_*^{-1}(B)$ und $\tilde{U} = \tilde{\gamma}^{-1}(U)$. Dann ist $\tilde{\gamma}|_{\tilde{Y}\setminus\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{B})}$ ein endlicher Morphismus der höchstens über E verzweigt. Außerdem ist

$$\tilde{\gamma}|_{\tilde{U}\setminus(\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{B})\cup\tilde{Y}_{sing})} : \tilde{U} \setminus (\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{B}) \cup \tilde{Y}_{sing}) \twoheadrightarrow U \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))$$

surjektiver Morphismus. Sei nun $\omega \in H^0\left(U \setminus E, \Omega^1_{U\setminus E}\right)$, mit Satz 2.1.2 können wir dann

$$\tilde{\gamma}|^*_{\tilde{U}\setminus(\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{B})\cup\tilde{Y}_{sing})}\left(\omega|_{U\setminus(\tilde{B}\cup\tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))}\right) = \overline{\omega}$$

zu einer Differentialform $\overline{\omega}'$ fortsetzen, die keine Pole bei $\tilde{E}$ hat. Da $\gamma|_{\tilde{U}\setminus(\tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{B})\cup\tilde{Y}_{sing})}$ höchstens über E verzweigt können wir mit Lemma 2.2.2 ω zu einer Form

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U \setminus (E \cap (\tilde{B} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))), \Omega^1_{U\setminus(E\cap(\tilde{B}\cup\tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing})))}(\log E)\right)$$

fortgesetzten. Nach Lemma 3.3.3 muss bereits

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U \setminus (E \cap (\tilde{B} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))), \Omega^1_{U\setminus(E\cap(\tilde{B}\cup\tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing})))}\right).$$

sein.
Da Ω^1_U lokal frei ist, genügt es nach Lemma 1.1.5 zu zeigen, dass $\operatorname{codim}_Y(E \cap (\tilde{B} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))) \geq 2$ ist, um eine Fortsetzung auf ganz U zu finden. Dies ist der Fall da $\tilde{Y}$ normal ist und $\tilde{B}$ und E keine gemeinsame Komponente haben. Somit ist

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U, \Omega^1_U\right).$$

□

Korollar 3.3.5. *Für U und E wie oben, mit $E = \sum_{i=1}^k E_i$ gilt für alle $1 \leq i \leq k$*

$$\omega \in H^0\left(U, \Omega^1_U(\log E)\right) \Leftrightarrow \omega \in H^0\left(U, \Omega^1_U(\log(E - E_i))\right).$$

Satz 3.3.6. *In Lemma 3.3.4 ist $\tilde{\omega}$ bereits in $H^0\left(U, \mathcal{I}_E \otimes \Omega^1_U(\log E)\right)$.*

Bemerkung. $\mathcal{I}_E \otimes \Omega^1_U(\log E)$ ist eine Untergarbe von Ω^1_U

Beweis. Sei $E = \sum_{i=1}^k E_i$.
Nach Lemma 3.2.6 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass für alle j der Schnitt $E_j \cap (E - \sum_{i=1}^j E_i)$ nur aus einem Punkt besteht. Da U das Urbild einer offenen Menge aus Z ist, können wir ohne Einschränkung annehmen,

dass $E \subset U$. Sonst wäre $E \cap U = \emptyset$, also nichts zu zeigen.
Sei $\omega \in H^0(U, \Omega^1_U)$ beliebig. Nach Lemma 3.3.1 ist die folgende Sequenz exakt:

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(U, \mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_U(\log E)) &\to H^0(U, \Omega^1_U(\log(E - E_1))) \\ &\to H^0\left(U, i_*\Omega^1_{E_1}(\log(E - E_1)|_{E_1})\right) \end{aligned} .$$

Da sich E_1 und $(E - E_1)$ transversal in genau einem Punkt schneiden ist

$$i_*\Omega^1_{E_1}(\log(E - E_1)|_{E_1}) = i_*\Omega^1_{E_1}(\log P),$$

wobei $P = E_1 \cap (E - E_1)$ nur ein Punkt ist. Somit hat $i_*\Omega^1_{E_1}(\log(E - E_1)|_{E_1})$ keine globalen Schnitte, das heißt

$$H^0\left(U, i_*\Omega^1_{E_1}(\log(E - E_1)|_{E_1})\right) = 0$$

Mit Lemma 3.3.4 folgt hieraus

$$\begin{aligned} \omega \in H^0(U, \Omega^1_U) \quad &\Leftrightarrow \quad \omega \in H^0(U, \Omega^1_U(\log(E - E_1))) \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in H^0(U, \mathcal{I}_{E_1} \otimes \Omega^1_U(\log E)) . \end{aligned}$$

Sei $E^j = \sum_{i=1}^j E_i$ und $\omega \in H^0(U, \mathcal{I}_{E^{j-1}} \otimes \Omega^1(\log E))$. Betrachte die folgende Sequenz:

$$0 \to H^0(U, \mathcal{A}) \to H^0(U, \mathcal{B}) \to H^0(U, \mathcal{C}),$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \mathcal{I}_{E^j} \otimes \Omega^1_U(\log E) \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{I}_{E^{j-1}} \otimes \Omega^1_U(\log(E - E_j)) \\ \mathcal{C} &:= i_*\mathcal{I}_{E^{j-1}}|_{E^j} \otimes \Omega^1_{E_j}(\log(E - E_j)|_{E_j}). \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.3.2 ist diese Sequenz exakt.
Angenommen $H^0(U, \mathcal{C}) = 0$ für alle $j = 1, ..., k$. Dann folgt induktiv

$$\omega \in H^0(U, \Omega^1_U) \quad \Leftrightarrow \quad \omega \in H^0(U, \mathcal{I}_E \otimes \Omega^1_U(\log E))$$

und damit die Behauptung. Es bleibt nun zuzeigen, dass für alle $j = 1, ..., n$ die Garbe $i_*\mathcal{I}_{E^{j-1}}|_{E^j} \otimes \Omega^1_{E_j}(\log(E - E_j)|_{E_j})$ keine globalen Schnitte hat.
Da E nur einfache normale Kreuzungspunkte hat und nach der Sortierung der E_j gilt:

$$i_*\mathcal{I}_{E^{j-1}}|_{E^j} \otimes \Omega^1_{E_j}(\log(E - E_j)|_{E_j}) = i_*\Omega^1_{E_j}(\log(E - E^j)|_{E_j}).$$

Nach Wahl der E_j ist der Schnitt von E_j mit $(E - E^j)$ nur ein einziger Punkt. Daher hat $i_* \Omega^1_{E_j}(\log(E - E^j)|_{E_j})$ mit der gleichen Argumentation wie oben keine globalen Schnitte und somit ist

$$H^0 \left(U, i_* \mathcal{I}_{E^{j-1}}|_{E^j} \otimes \Omega^1_{E_j}(\log(E - E_j)|_{E_j}) \right) = 0$$

für alle j. □

in Lemma 3.3.4 brauchten wir für den Beweis, dass E nur einfache normale Kreuzungspunkte hat. Wir wollen nun beweisen, dass die Aussage des Lemmas für beliebige Auflösungen von Quotientensingularitäten gilt.

Satz 3.3.7. *Sei $\pi : Y \to Z$ eine beliebige Auflösung einer Quotientensingularität mit exzeptionellen Ort E. Dann gilt für jede offene Menge $V \subset Z$ mit Urbild $U := \pi^{-1}(V)$, dass für alle*

$$\omega \in H^0 \left(U \setminus E, \Omega^1_{U \setminus E} \right)$$

eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0 \left(U, \Omega^1_U \right)$$

existiert.

Beweis. Da wir uns für die Fortsetzbarkeit über E interessieren können wir ohne Einschränkung annehmen, dass E ein reduzierter Divisor ist. Mit Fakt 1.2.7 existiert daher eine logarithmische Auflösung von (Y, E)

$$\gamma : (\tilde{Y}, \tilde{E}) \longrightarrow (Y, E),$$

mit exzeptionellen Ort Δ Wir können also jede beliebige Differentialform ω aus $H^0 \left(U \setminus E, \Omega^1_{U \setminus E} \right)$ zu einer Form

$$\omega' := \gamma^*(\omega) \in H^0 \left(\gamma^{-1}(U) \setminus \tilde{E}, \Omega^1_{\gamma^{-1}(U) \setminus \tilde{E}} \right)$$

zurück ziehen.
Nach Lemma 3.3.4 existiert eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega}' \in H^0 \left(\gamma^{-1}(U), \Omega^1_{\gamma^{-1}(U)} \right)$$

von ω.
Mit $\psi := (\gamma|_{\gamma^{-1}(U) \setminus \Delta})^{-1}$ erhalten wir eine Form

$$\tilde{\omega} := \psi^*(\tilde{\omega}') \in H^0 \left(U \setminus (Z, E)_{sing}, \Omega^1_{U \setminus (Z,E)_{sing}} \right).$$

Da Ω^1_U lokal frei und $\operatorname{codim}_Y((Z, E)_{sing}) \geq 2$ ist erhalten wir mit Lemma 1.1.5, dass bereits

$$\tilde{\omega} \in H^0 \left(U, \Omega^1_U \right)$$

□

Kapitel 4

Fortsetzbarkeit von pluri-log-Formen auf Desingularisierungen von Quotientensingularitäten ohne Randdivisoren

4.1 $(-a)$-Kurven I

Beispiel 4.1.1. In Beispiel 2.1.1 war $\omega \in \mathrm{Sym}^2(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log E))$ mit einem einfachen Pol bei E. Dabei war $\tilde{Z} = O_{\mathbb{P}^1}(-2)$ und E der Nullschnitt. Betrachten wir die Standard-Überdeckung aus Beispiel 2.1.1 und versuchen wir ein $\omega \in \mathrm{Sym}^2(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log E))$ mit doppeltem Pol bei E zu finden so stellen wir fest, dass dies nicht möglich ist. Denn angenommen es gäbe ein solches $\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^2(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log E))\right)$ mit

$$\omega|_{U_\infty} = a_\infty d(x_\infty)^2 + b_\infty \frac{1}{y_\infty} d(x_\infty)d(y_\infty) + c_\infty \frac{1}{y_\infty^2}(dy_\infty)^2.$$

wobei a_∞, b_∞ *und* c_∞ Einschränkungen regulärer Funktionen auf $\tilde{Z}$ sind und $c_\infty|_{(y_\infty=0)} \not\equiv 0$, dann hat ω einen echten Pol zweiter Ordnung bei $E|_{U_\infty}$. Betrachten wir nun die Einschränkung von ω auf U_0

$$\begin{aligned}\omega|_{U_0} = \phi^*_{0,\infty}(\omega) = \quad & (-\tfrac{a_0}{x_0^4} - 2\tfrac{b_0}{x_0} + 4\tfrac{c_0}{x_0^2})(dx_0)^2 + \\ & (-\tfrac{b_0}{y_0} + 4\tfrac{c_0}{x_0 y_0})(dx_0)(dy_0) + \tfrac{c_0}{y_0^2}(dy_0)^2,\end{aligned}$$

wir sehen, dass ω auch bei $\{x_0 = 0\}$ Pole hat. Mit anderen Worten ω ist nicht auf ganz $\tilde{Z}$ definiert. Mit der selben Argumentation erhalten wir auch dass die Einschränkung von ω auf U_0 keine Pole zweiter Ordnung haben kannn. Es gibt also kein $\omega \in H^0\left(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^2(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log E))\right)$ welches einen doppelten Pol entlang E hat.
Die gleiche Aussage gilt auch für offene Mengen $\tilde{U} \subset \tilde{Z}$ in denen E ganz enthalten sind, also $E \subset \tilde{U}$.

Das obige Beispiel der (-2)-Kurve E, legt die Überlegung nahe ob wir pluri-Formen ω die außerhalb von E definiert sind zu Formen $\tilde{\omega}$ fortsetzen können die in einer Untergarbe von $\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log E)$ liegen.

Fakt 4.1.2. *Sei $\tilde{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ und $\tilde{E}$ der Nullschnitt mit $\tilde{E}.\tilde{E} = -a$. Sei Z eine glatte Varietät mit $\dim(Z) = 2$. Ist $E \subset Z$ ein irreduzibler Divisor mit $E^2 = -a$ dann existiert eine analytische Umgebung U_E von E und eine analytische Umgebung $U_{\tilde{E}}$ von $\tilde{E}$, so dass U_E analytisch isomorph zu $U_{\tilde{E}}$ ist.*

Definition 4.1.3. Sei (Z, Δ) ein logarithmisch glattes reduziertes Paar und U eine analytische Umgebung von Δ, $\mathcal{O}_U^{hol}$ bezeichne die Menge der holomorphen Funktionen auf U und mit $(\Omega^1_U)^{hol}$ die $\mathcal{O}_U^{hol}$-Modul der holomorphen Differentialformen.
Analog zu Abschnitt 1.3 definiere $(\Omega^1_U)^{hol}(\log \Delta)$ als den $\mathcal{O}_U^{hol}$-Untermodul von $(\Omega^1_U)^{hol}(\Delta) = (\Omega^1_U)^{hol} \otimes_{\mathcal{O}_U^{hol}} \mathcal{O}_U^{hol}(\Delta)$ mit den Eigenschaften:

1. $(\Omega^1_U)^{hol}(\log \Delta)|_{U\setminus\Delta} = (\Omega^1_{U\setminus\Delta})^{hol}$

2. Für Punkt p aus Δ gilt,

$$\omega_p \in (\Omega^1_U)^{hol}(\log \Delta)|_p \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \omega_p \in (\Omega^1_U)^{hol}(\Delta)|_p \\ \textit{und} \\ \omega_p = \sum_{i=1}^s a_i \frac{dz_p^i}{z_p^i} + \sum_{j=s+1}^n b_j dz_p^j \end{array}$$

   mit $(z_p^1, ...z_p^n)$ logarithmisches Koordinatensystem entlang Δ an p und $a_i, b_j \in (\mathcal{O}_{U,p})^{hol}$.

Lemma 4.1.4. *Sei $Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ mit Nullschnitt E. Ist U eine analytische Umgebung von E, dann gibt es für alle $\omega \in H^0\left(U \setminus E, \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U\setminus E})^{hol})\right)$ eine Fortsetzung*

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes_{(\mathcal{O}_U)^{hol}} \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_U)^{hol}(\log(E)))\right).$$

Beweis. Betrachte die Standard-Überdeckung U_0 und U_∞ von Z mit Koordinaten (x_i, y_i), und koordinaten Übergang

$$\gamma_{0,\infty} : (x_0, y_0) \to (1/x_0, x_0^a y_0) = (x_\infty, y_{infty}).$$

Dann ist $E_i := E \cap U_i = \{y_i = 0\}$ und die Bündel-Projektion ist in diesen Koordinaten gegeben durch $(x_i, y_i) \mapsto (x_i)$. Setze $U_i' = U_i \cap U$.
Es genügt zu zeigen, dass jedes ω, welches beliebige Pole entlang von E haben darf, als pluri-log-Form regulär, mit Nullstelle mindestens der Ordnung $\frac{n}{a}$ bei E, ist.
Dazu betrachte die Einschränkung von ω auf U_i'. Da $\mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U\setminus E})^{hol})$ lokal frei können wir nach der Wahl von U_i' jedes $\omega \in H^0\Big(U \setminus E, \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U\setminus E})^{hol})\Big)$ auf U_∞' schreiben als:

$$\omega_\infty = \omega|_{U_\infty'} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{x_\infty^{b_i}}{y_\infty^{c_i}} f_i(x_\infty, y_\infty)(dx_\infty)^i (dy_\infty)^{n-i}}_{:=\omega_{\infty_i}},$$

mit $b_i \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $f_i(x_\infty, y_\infty)$ Einschränkungen auf U holomorpher Funktionen mit $f_i(x_\infty, 0) \not\equiv 0$ und $f(0, y_\infty) \not\equiv 0$.
Es ist ersichtlich , dass die einzelnen Summanden ω_{∞_i} von ω_∞ linear unabhängig sind. Daher genügt es die Behauptung für alle ω_i zu zeigen, die auf U_∞' aussehen wie

$$\omega_{\infty_i} = \frac{x_\infty^{b_i}}{y_\infty^{c_i}} f_i(x_\infty, y_\infty)(dx_\infty)^i (dy_\infty)^{n-i}.$$

Zeige zunächst, dass ω_{∞_i} auf U_∞' als pluri-log-Form regulär, mit Nullstelle mindestens der Ordnung $\frac{n}{a}$ bei E_∞, ist. Wir müssen also zeigen, dass $c_i \leq n - i - n/a$ ist. Um dies zuzeigen betrachten wir den Rückzug $\gamma_{0,\infty}^*(\omega_{\infty_i})$ und nutzen aus, dass ω_i, und somit auch $\gamma_{0,\infty}^*(\omega_{\infty_i})$, höchstens Pole bei E haben darf

$$\begin{aligned}
(\gamma_{0,\infty})^*(\omega_{\infty_i}) &= f_i(\tfrac{1}{x_0}, x_0^a y_0) \tfrac{1}{x_0^{b_i}} \cdot \tfrac{1}{x_0^{a \cdot c_i} \cdot y_0} (d\tfrac{1}{x_0})^i (d(x_0^a y_0))^{n-i} \\
&= f_i(\tfrac{1}{x_0}, x_0^a y_0) \tfrac{1}{x_0^{a \cdot c_i + b_i} y_0^{c_i}} (-\tfrac{1}{x_0^2} dx_0)^i (a \cdot x_0^{a-1} y_0 dx_0 + x_0^a dy_0)^{n-i} \\
&= f_i(\tfrac{1}{x_0}, x_0^a y_0) \tfrac{1}{x_0^{a \cdot c_i + b_i} y_0^{c_i}} (-1)^i \tfrac{1}{x_0^{2i}} (dx_0)^i \cdot \\
&\quad \textstyle\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} (a \cdot x_0^{a-1} y_0 dx_0)^j (x_0^a dy_0)^{n-i-j} \\
&= \textstyle\sum_{j=i+1}^{n} k_{i,j} \cdot y_0^{\beta_{i,j}} \cdot x_0^{\alpha_{i,j}} f_i(\tfrac{1}{x_0}, x_0^a y_0)(dx_0)^{j-i} (dy_0)^{n-j+i}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= -a\cdot c_i - b_i - j - (a+1)\cdot i + a\cdot n\\ \beta_{i,j} &= -c_i + j - i\\ k_{i,j} &= (-1)^i (a)^{j-i}\binom{n-i}{j-i}.\end{aligned}$$

Da $f_i(\frac{1}{x_0}, x_0^a y_0)\not\equiv 0$ auf $\{x_0 = 0\}$ und $\omega_i|_{U_0}$ nur Pole entlang $E_0 = \{y_0 = 0\}$ haben darf, muss für alle j gelten, dass

$$0 \le -a\cdot c_i - b_i - j - (a+1)\cdot i + a\cdot n. \tag{4.1}$$

Für $j = n$ folgt damit

$$c_i \le n - n/a - i - i/a - b_i/a \le n - n/a - i. \tag{4.2}$$

Somit können wir jedes ω welches mehr als logarithmische Pole entlang E haben darf auf U'_∞ zu einer Form

$$\tilde{\omega}_{U'_\infty} \in H^0\left(U'_\infty, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U'_\infty})^{hol}(\log E))\right)$$

fortsetzen. Mit der gleichen Argumentation erhalten wir, dass sich $\omega|_{U'_0}$ zu einer Form

$$\tilde{\omega}_0 \in H^0\left(U'_0, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U'_1})^{hol}(\log E))\right)$$

fortsetzt. Also können wir ω global wie gefordert fortsetzen. □

Mit Formel (4.2) folt

Korollar 4.1.5. *Jedes* $\omega \in H^0\left(U, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes_{(\mathcal{O}_U)^{hol}} \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_U)^{hol}(\log(E)))\right)$ *ist auf* U'_i *sogar eine* $\mathcal{O}^{hol}_{U'_i}$ *Linearkombination von:*

$$\frac{1}{y_i^{n-\lceil \frac{n}{a} \rceil}}(dy_i)^n,\ \frac{1}{y_i^{n-1-\lceil \frac{n}{a} \rceil - \lceil \frac{1}{a} \rceil}}(dy_i)^{n-1}(dx_i),\ \ldots,\ y_i^{2\cdot\lceil \frac{n}{a} \rceil}(dx_i)^n$$

Mit Fakt 4.1.2 und obigem Lemma können wir an dieser Stelle das Ergebniss aus Abschnitt 2.2 für beliebige $(-a)$-Kurven verbessern.

Satz 4.1.6. *Sei Z eine glatte Varietät und E eine $(-a)$-Kurve, dann gilt, dass für alle* $\omega \in H^0\left(Z \setminus E, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{Z\setminus E})\right)$ *eine pluri-log-Form*

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(Z, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log(E)))\right)$$

mit $\tilde{\omega}|_{Z\setminus E} = \omega$ *existiert.*
Jede Form mit beliebigen Polen entlang E setzt sich also zu einer pluri-log-Form mit Nullstelle der Ordnung $\lceil \frac{n}{a} \rceil$ fort.

Bemerkung 4.1.7. Hier ist nun wieder die Rede von pluri-log-Formen im algebraischen geometrischen Sinne.

Beweis. Da das Problem analytisch lokal ist, reicht es eine analytische Umgebung von E zu finden, auf der jede beliebige Differentialform fortsetzbar ist.
Nach Fakt 4.1.2 existiert ein Isomorphismus γ einer analytischen Umgebung U_E von E in eine analytische Umgebung $U_{\tilde{E}}$ vom Nullschnitt $(\tilde{E})$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ mit $\gamma(E) = \tilde{E}$. (Achtung: γ ist im analytischen und nicht im algebraisch geometrischen Sinne ein Isomorphismus)
Sei nun $\omega \in H^0\Big(Z \setminus E, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{Z\setminus E})\Big)$ beliebig. Schränken wir die Differentialform ω auf U_E ein und ziehen sie mit $(\gamma^{-1})^*$ zurück, so erhalen wir:

$$\omega' = (\gamma^{-1})^*(\omega) \in H^0\left(U_{\tilde{E}} \setminus \tilde{E}, \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U_{\tilde{E}}\setminus\tilde{E}})^{hol})\right).$$

Nach Lemma 4.1.4 können wir ω' zu einer pluri-log-Form

$$\tilde{\omega'} \in H^0\left(U_{\tilde{E}}, \mathcal{I}_{\tilde{E}}^{\lceil\frac{n}{a}\rceil} \otimes_{(\mathcal{O}_{U_{\tilde{E}}})^{hol}} \mathrm{Sym}^n((\Omega_{U_{\tilde{E}}})^{hol}(\log(\tilde{E})))\right)$$

fortsetzen.
Da γ ein Isomorphismus ist, ändert γ^* nichts an der Pol- und Nullstellenordnung von pluri-log-Formen, das heißt wir erhalten:

$$\tilde{\omega} = \gamma^*(\tilde{\omega}') \in H^0\left(U_E, \mathcal{I}_E^{\lceil\frac{n}{a}\rceil} \otimes_{(\mathcal{O}_{U_E})^{hol}} \mathrm{Sym}^n((\Omega^1_{U_E})^{hol}(\log(E)))\right)$$

$\tilde{\omega}$ stimmt auf $U_E \setminus E$ mit ω überein. Also ist insbesondere $\tilde{\omega}$ eine pluri-log-Form im algebraisch geometrischen Sinne, und es gilt

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U_E, \mathcal{I}_E^{\lceil\frac{n}{a}\rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{U_E}(\log(E)))\right)$$

Wir können also jedes $\omega \in H^0(Z \setminus E, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{Z\setminus E}))$ wie gewünscht fortsetzen. □

Da jede Zariski offene Menge U auch analytisch offen ist folgt

Korollar 4.1.8. *Die Aussage des Satzes gilt für alle offenen Mengen $U \subset Z$ mit $E \in U$*

Mit Korollar 4.1.5 folgt

Korollar 4.1.9. $\mathcal{I}_E^{\lceil\frac{n}{a}\rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log(E)))$ *wird lokal erzeugt von*

$$\frac{1}{y_i^{n-\lceil\frac{n}{a}\rceil}}(dy_i)^n,\ \frac{1}{y_i^{n-1-\lceil\frac{n}{a}\rceil-\lceil\frac{1}{a}\rceil}}(dy_i)^{n-1}(dx_i),\ \ldots,\ y_i^{2\cdot\lceil\frac{n}{a}\rceil}(dx_i)^n.$$

Bemerkung 4.1.10. Dieses Egebnis ist für beliebige $(-a)$-Kurven das best mögliche.

Beweis. Betrachte $\mathcal{O}(-a)$ mit Nullschnitt E, offener Überdeckung $U_0,\ U_\infty$ und Koordinatenübergang $\gamma_{0,\infty}$ wie oben.
Die Form $\omega \in H^0\left(U_\infty, \mathrm{Sym}^a(\mathcal{I}_E^{\lceil\frac{a}{a}\rceil} \otimes \mathrm{Sym}^a(\Omega^1_{U_\infty}(\log E)))\right)$, die gegeben ist durch

$$\omega = \frac{1}{y_\infty^{a-1}}(dy_\infty)^a,$$

setzt sich zu einer Form $\tilde{\omega} \in H^0\left(\mathcal{O}(-a), \mathcal{I}_E \otimes \mathrm{Sym}^a(\Omega^1_{\mathcal{O}(-a)}(\log E))\right)$ fort, Da

$$\begin{aligned} \gamma_{0,\infty}^*(\omega) &= \textstyle\sum_{i=0}^a \binom{a}{i} a^i \frac{1}{x_0^{a^2-a} y_0^{a-1}} (x_0^{a-1} y_0 (dx_0))^i (x_0^a (dy_0))^{a-i} \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^a \binom{a}{i} a^i \frac{x_0^{a-i}}{y_0^{a-1-i}} (dx_0)^i (dy_0)^{a-i}}_{\in H^0\left(U_0, \mathcal{I}_E \otimes \mathrm{Sym}^a(\Omega^1_{\mathcal{O}(-a)}(\log E))\right)}. \end{aligned}$$

□

4.2 Desingularisierung von Quotientensingularitäten I

In Kapitel 3 hatten wir schon ein ähnliches Ergebnis für 1-Formen und Auflösungen von Quotientensingularitäten. Um die Aussage jetzt auch für pluri-log-Formen zu erhalten müssen wir das Auflösungsdiagramm aus Kapitel 3 erweitern:

(4.3)
$$\begin{tikzcd} \tilde{\tilde{Y}} \arrow[dr, "\pi'"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\tilde{\gamma}}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\tilde{\pi}}"'] & & \\ & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ & \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"] & Z, \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\pi' : \left(\tilde{\tilde{Y}}, \tilde{\tilde{E}}\right) \to \left(\tilde{Y}, \tilde{E}\right)$ eine Logarithmische Auflösung, $\tilde{E}$ das reduzierte Urbild vom π exzeptionellen Ort E.
Bereiten wir nun die Verallgemeinerung der Aussage vor.

Lemma 4.2.1. *Seien $\tilde{\tilde{Y}}$ und $\tilde{Z}$ wie im Diagramm 4.3. Dann gilt für jede offene Menge $\tilde{V} \subset \tilde{Z}$ mit Urbild $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{\tilde{\pi}}^{-1}\left(\tilde{V}\right)$, dass für alle*

$$\omega \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}} \setminus \tilde{\tilde{E}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}\setminus\tilde{\tilde{E}}})\right)$$

eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}))\right) \cap H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}\right)$$

mit $\tilde{\tilde{E}} = \sum_{i=1}^m \tilde{\tilde{E}}_i$ und $a = \max_i \left\{a_i = |\tilde{\tilde{E}}_i.\tilde{\tilde{E}}_i|\right\}$ existiert.

Beweis. Zunächst gilt, dass das Bild von $\tilde{\tilde{E}}$ unter $\tilde{\tilde{\pi}}$ Vereinigung endlich vieler Punkte ist. Nach Satz 2.1.2 existiert damit für jedes

$$\omega \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}} \setminus \tilde{\tilde{E}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}\setminus\tilde{\tilde{E}}})\right)$$

eine Fortsetzung:

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}})\right) \quad . \tag{4.4}$$

Bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}))\right)$.
Mit Gleichung (4.4) gilt offensichtlich, dass $\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}} \setminus \tilde{\tilde{E}}_1, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}\setminus\tilde{\tilde{E}}_1})\right)$ ist. Dann gilt aber mit Satz 4.1.4

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}_1}^{\lceil \frac{n}{a_1} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}_1))\right) .$$

Sei nun

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}^j}^{\lceil \frac{n}{a^j} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}^j))\right) \cap H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}})\right)$$

mit $a^j = \max_{i=1\ldots j}\{a_i\}$ und $\tilde{\tilde{E}}^j = \sum_{i=1}^j \tilde{\tilde{E}}_i$. Nach Satz 4.1.4 gilt wieder

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}_{j+1}}^{\lceil \frac{n}{a_{j+1}} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}_{j+1}))\right) ,$$

also ist

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}^{j+1}}^{\lceil \frac{n}{a^{j+1}} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}^{j+1}))\right) \cap H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}})\right) .$$

Induktiv folgt

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}}))\right) \cap H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}})\right) .$$

□

Lemma 4.2.2. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein endlich surjektiver Morphismus logarithmisch glatter reduzierter Paare und $U \subset Z$ offen mit Urbild $\tilde{U} := \gamma^{-1}(U)$. Ist D_i eine Komponente von Δ mit $\gamma^*(D_i) = \sum_{k=0}^{j} n_{i,k}\tilde{D}_{i,k}$. Dann liefert der Pullback einen Morphismus*

$$\gamma^* : H^0(U, \mathcal{A}) \to H^0\left(\tilde{U}, \mathcal{B}\right)$$

mit

$$\mathcal{A} := \mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))$$
$$\mathcal{B} := \mathcal{I}^{n_{i,0}}_{\tilde{D}_{i,0}} \otimes ... \otimes \mathcal{I}^{n_{i,j}}_{\tilde{D}_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))$$

und den assoziierten Morphismus von Garben

$$d\gamma_{\mathcal{I}} : \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))) \to \mathcal{I}^{n_{i,0}}_{\tilde{D}_{i,0}} \otimes ... \otimes \mathcal{I}^{n_{i,j}}_{\tilde{D}_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))$$

Ist γ unverzweigt über $Z \setminus \Delta$, so ist $d\gamma_{\mathcal{I}}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Mit Fakt 1.3.4 und Lemma 1.2.6 folgt direkt, dass γ^* ein Morphismus für jedes U ist.
Es bleibt also noch zu zeigen, dass $d\gamma_{\mathcal{I}}$ ein Isomorphismus ist, wenn γ nur über Δ verzweigt.
Sei also γ unverzweigt über $Z \setminus \Delta$, dann ist mit Fakt 1.3.4 der zu γ^* assoziierte Morphismus

$$d\gamma : \gamma^*(\mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))) \to \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))$$

ein Isomorphismus. Tensorieren mit $\mathcal{I}^{n_{i,0}}_{\tilde{D}_{i,0}} \otimes ... \otimes \mathcal{I}^{n_{i,j}}_{\tilde{D}_{i,j}} = \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i})$ liefert dann

$$d\gamma_{\mathcal{I}} : \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta))) \twoheadrightarrow \mathcal{I}^{n_{i,0}}_{\tilde{D}_{i,0}} \otimes ... \otimes \mathcal{I}^{n_{i,j}}_{\tilde{D}_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \tilde{\Delta}))$$

Wir müssen nur noch prüfen ob $d\gamma_{\mathcal{I}}$ injektiv ist. Dazu betrachte $d\gamma_{\mathcal{I}}$ auf den Keimen:
Sei $p \in \tilde{Z}$ beliebig und $\omega_p \in \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_Z(\log \Delta)))|_p$ mit $\gamma^*(\omega_p) = 0$. Nach Lemma 1.2.6 können wir Koordinatenumgebungen $\tilde{U}_p$ von p mit logarithmischen Koordinaten $(\tilde{z}^p_0, ..., \tilde{z}^p_n)$ und U_p von $\gamma(p)$ mit logarithmischen Koordinaten $(z^p_0, ..., z^p_n)$ wählen sodass $z^p_i \circ \gamma = \gamma_i$ gegeben ist durch

$$\gamma_i = (\tilde{z}^p_{h_0})^{n_{i,h_g}} \cdot ... \cdot (\tilde{z}^p_{h_l})^{n_{i,h_g}}$$

Zunächst können wir also ω_p wie folgt schreiben:

$$\omega_p = z^p_i \cdot (\sum_{i=0}^{l} a_i \frac{1}{z^p_i} dz^p_i + \sum_{j=l+1}^{n} b_j dz^p_j)$$

Damit ist dann

$$\gamma^*(\omega_p) = (\tilde{z}_{h_0}^p)^{n_{i,h_g}} \cdot \ldots \cdot (\tilde{z}_{h_l}^p)^{n_{i,h_g}} \cdot (\sum_{i=0}^{l} a_i \circ \gamma \frac{1}{z_i^p \circ \gamma} d(z_i^p \circ \gamma) + \sum_{j=l+1}^{n} b_j \circ \gamma d(z_j^p \circ \gamma))$$

Dies ist aber genau dann Null wenn

$$\gamma^*(\sum_{i=0}^{l} a_i \frac{1}{z_i^p} dz_i^p + \sum_{j=l+1}^{n} b_j dz_j^p) = \sum_{i=0}^{l} a_i \circ \gamma \frac{1}{z_i^p \circ \gamma} d(z_i^p \circ \gamma) + \sum_{j=l+1}^{n} b_j \circ \gamma d(z_j^p \circ \gamma) = 0.$$

Da aber $d\gamma$ ein Isomorphismus ist muss dann bereits

$$\sum_{i=0}^{l} a_i \frac{1}{z_i^p} dz_i^p + \sum_{j=l+1}^{n} b_j dz_j^p = 0$$

sein. Es folgt, dass bereits ω_p Null sein musste. □

Korollar 4.2.3. *Sei $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ ein endlich surjektiver Morphismus logarithmisch glatter Paare der höchstens über Δ verzweigt. Sei weiter D_i eine Komponente von Δ mit $\gamma^*(D_i) = \sum_{i=0}^{j} n_{i,j} \tilde{D}_j$. Ist ω eine pluri-log-Form auf $\tilde{Z}$, die mehr als logarithmische Pole entlang von Δ haben darf, dann gilt folgende Äquivalenz*

$$\omega \in H^0 \left(Z, \mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta))\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\gamma^*(\omega) \in H^0 \left(\tilde{Z}, \mathcal{I}_{\tilde{D}_0}^{n_{i,0}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{I}_{\tilde{D}_j}^{n_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_{\tilde{Z}}^1(\log \tilde{\Delta}))\right).$$

Beweis. Sei $\omega \in H^0 \left(Z, \mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta))\right)$, da γ surjektiv ist kann man γ auch als Element von $H^0 \left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta)))\right)$ auffassen. Mit Lemma 4.2.2 gilt dann

$$\gamma^*(\omega) \in H^0 \left(\tilde{Z}, \mathcal{I}_{\tilde{D}_1}^{n_{i,1}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{I}_{\tilde{D}_j}^{n_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_{\tilde{Z}}^1(\log \tilde{\Delta}))\right)$$

Ist andereseits $\gamma^*(\omega) \in H^0 \left(\tilde{Z}, \mathcal{I}_{\tilde{D}_1}^{n_{i,1}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{I}_{\tilde{D}_j}^{n_{i,j}} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_{\tilde{Z}}^1(\log \tilde{\Delta}))\right)$ dann ist

$$\omega \in H^0 \left(\tilde{Z}, \gamma^*(\mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta)))\right).$$

Insbesondere ist dann $\omega \in H^0 \left(Z, \mathcal{I}_{D_i} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega_Z^1(\log \Delta))\right)$. □

Satz 4.2.4. *Sei* $(Z, \emptyset)$ *ein reduziertes Paar mit Quotientensingularität und* $\pi : (Y, \emptyset) \to (Z, \emptyset)$ *eine logarithmische Auflösung mit exzeptionellen Ort* E. *Dann gilt für jede offene Menge* $V \subset Z$ *mit Urbild* $U := \pi^{-1}(V)$, *dass jede pluri Differentialform* ω *die beliebige Pole entlang von* E *haben kann, also*

$$\omega \in H^0\left(U \setminus E, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{U \setminus E})\right)$$

zu einer Form

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a \cdot g} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_U(\log E))\right)$$

fortgesetzt werden kann.
Mit der Notation aus Diagramm 4.3 ist $a = max_i\{|\tilde{\tilde{E}}_i.\tilde{\tilde{E}}_i|\}$ *und* $g = ord(G)$, *und die* $\tilde{\tilde{E}}_i$ *die Komponenten von* $red(\tilde{\tilde{\gamma}}^{-1}(E))$ *und* G *die Gruppe, die auf* $\tilde{Z}$ *wirkt.*

Beweis. Für den Beweis betrachte nochmals das erweiterte Auflösungsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tilde{Y}} \arrow[dr, "\pi'"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\tilde{\gamma}}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\tilde{\pi}}"'] & & \\
& \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\
& \tilde{Z} \arrow[r, "\gamma"] & Z
\end{tikzcd}$$

Sei $\omega \in H^0\left(U \setminus E, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{U \setminus E})\right)$ beliebig und

$$\omega' := \tilde{\gamma}^*(\omega) \in H^0\left(\underbrace{\tilde{U}}_{:=\tilde{\gamma}^{-1}(U)} \setminus (\underbrace{\tilde{E}}_{:=\tilde{\gamma}^{-1}(E)} \cup \tilde{Y}_{sing}), \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{U} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{Y}_{sing})}\right).$$

Dann existiert nach Lemma 2.1.2 eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega'} \in H^0\left(\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}})\right).$$

Desweiteren können wir

$$\omega'' = \pi'^*(\omega') \in H^0\left(\underbrace{\tilde{\tilde{U}}}_{:=\pi'^{-1}(\tilde{U})} \setminus \underbrace{\tilde{\tilde{E}}}_{red(\pi'^{-1}(\tilde{E} \cup (\tilde{Y}_{sing} \cap \tilde{U}))}, \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{\tilde{U}} \setminus \tilde{\tilde{E}}})\right).$$

betrachten. Für ω'' existiert nach Lemma 4.2.1 eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega}'' \in H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \mathcal{I}_{\tilde{\tilde{E}}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}(\log \tilde{\tilde{E}})\right) \cap H^0\left(\tilde{\tilde{U}}, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{\tilde{U}}}\right)$$

mit $a = max_i(|\tilde{\tilde{E}}_i.\tilde{\tilde{E}}_i|)$. Da π' birational ist existiert eine pluri-log-Form $\tilde{\tilde{\omega}}'$ auf $\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}$ für die gilt:

$$\tilde{\tilde{\omega}}' \in H^0\left(\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}, \mathcal{I}_{\tilde{E}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}\setminus\tilde{Y}_{sing}}(\log \tilde{E}))\right)$$

mit a wie oben, also das Maximum über die selbst Schnitte der $\tilde{\tilde{E}}_i$.
Nun stimmt $\tilde{\tilde{\omega}}'$ mit $\tilde{\omega}'$ auf $\tilde{U} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{Y}_{sing})$ überein. Also gilt auf ganz $\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}$ dass $\tilde{\omega}' = \tilde{\tilde{\omega}}'$. Damit gilt, dass $\tilde{\omega}'$ in

$$H^0\left(\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}, \mathcal{I}_{\tilde{E}}^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{U}\setminus\tilde{Y}_{sing}}(\log \tilde{E})\right) \cap H^0\left(\tilde{U} \setminus \tilde{Y}_{sing}, \operatorname{Sym}^n \Omega^1_{\tilde{U}\setminus\tilde{Y}_{sing}}\right).$$

liegt.
Sei nun $B \subset Z$ der Verzweigungsdivisor von γ und $B' := \pi_*^{-1}(B) \subset Y$ seine strikte Transformierte. Da $\gamma|_{\tilde{Y}\setminus\tilde{\gamma}^{-1}(B')}$ höchstens über E verzweigt, existiert nach Korollar 4.2.3 ein

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U \setminus (B' \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing})), \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a \cdot n_{\tilde{\gamma}}} \rceil} \otimes \Omega^1_{U\setminus(B'\cup\tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))}(\log E)\right).$$

das auf $U \setminus (E \cup B' \cap \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))$ mit ω übereinstimmt, wobei $n_{\tilde{\gamma}}$ die Verzweigungsordnung von $\tilde{\gamma}$ ist.
Somit existiert eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U \setminus (E \cap (B' \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))), \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a \cdot n_{\tilde{\gamma}}} \rceil} \otimes \Omega^1_{U\setminus(E\cap(B'\cup\tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing})))}(\log E)\right).$$

Wie in Satz 2.2.6 gilt wieder dass $\operatorname{codim}_Y(E \cap (B' \cup \tilde{\gamma}(\tilde{Y}_{sing}))) \leq 2$.
Da $\mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a \cdot n_{\tilde{\gamma}}} \rceil} \otimes \Omega^1_U(\log E)$ lokal frei ist, ist nach dem zweiten Riemannschen Hebbarkeitssatz $\tilde{\omega}$ bereits auf ganz U definiert:

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(U, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a \cdot n_{\tilde{\gamma}}} \rceil} \otimes \Omega^1_U(\log E)\right).$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $n_{\tilde{\gamma}} \geq g$ ist.
Beachte, dass γ durch die Gruppenoperation von G auf $\tilde{Z}$ gegeben ist. Für jedes $z \in Z$ gilt damit, dass die Mächtigkeit des Urbildes gleich der Mächtigkeit seiner Bahn ist. Also

$$\#(\gamma^{-1}(z)) = \#(G.\tilde{z}) \leq \#G = g.$$

Desweiteren gilt für jedes $y \in Y$, dass $\#(\tilde{\gamma}^{-1}(y)) = \#(\gamma^{-1}(\pi(y)))$ also insbesondere auch $n_\gamma = n_{\tilde{\gamma}}$. $\square$

Kapitel 5

Fortsetzbarkeit von pluri-log-Formen über $(-a)$-Kurven mit Randdivisoren

5.1 Randdivisoren die mit der $(-a)$-Kurve höchstens einen transversalen Schnittpunkt haben

Bisher sind wir immer davon ausgegangen, dass für den Randdivisor Δ von Z gilt, dass $\Delta = \emptyset$ ist. Es ist noch nicht geklärt, ob das Ergebniss aus Satz 2.2.6 auch für solche Fälle verbessert werden kann, in denen $\Delta \neq \emptyset$ ist. Betrachte wieder den Fall der $(-a)$-Kurve.

Lemma 5.1.1. *Sei $\tilde{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ mit Nullschnitt E und Standard-Überdeckung U_0, U_∞, lokalen Koordinaten (x_i, y_i) und Koordinatenübergangsfunktion*

$$\gamma_{0,\infty} : (x_0, y_0) \to (\frac{1}{x_0}, y_0 \cdot x_0^a) = (x_\infty, y_\infty)$$

wie in Kapitel 4.1.
Sei $\tilde{\Delta} = E + E'$ mit $E'|_{U_i} = \{x_i = 0\}$. Ist $\tilde{U} \subset \tilde{Z}$ eine offene Umgebung von E, so kann jede pluri-log-Form

$$\omega \in H^0\left(\tilde{U} \setminus E, \mathrm{Sym}^n_{\tilde{U}\setminus E}(\log \tilde{\Delta})\right)$$

welche mehr als logarithmische Pole entlang von E haben darf, zu einer Form

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{U}, \mathrm{Sym}^n_{\tilde{U}}(\log(\tilde{\Delta}))\right)$$

fortgesetzt werden.

Beweis. Setzte $U'_i = U_i \cap \tilde{U}$. Zeige zunächst, dass die Einschränkung von ω auf U'_∞ höchstens logarithmische Pole bei E haben kann. Analog zum Beweis von Lemma 4.1.4 genügt es pluri-log-Formen ω zu betrachten, die auf U'_∞ gegeben sind durch

$$\omega|_{U_\infty} = \frac{x_\infty^{b_i}}{y_\infty^{c_i} x_\infty^i} \underbrace{\tilde{f}_i|_{U_\infty}(x_\infty, y_\infty)}_{=:f_i}(dx_\infty)^i(dy_\infty)^{n-i}, \quad \text{mit} \quad \tilde{f}_i \in \mathcal{O}_{\tilde{Z}}(U)$$

und $f_i(0, y_\infty) \not\equiv 0$, $f_i(x_\infty, 0) \not\equiv 0$, und $b_i \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{Z}$ und $i \in \{0, ...n\}$ beliebig. Betrachtet man nun die Einschränkung von ω auf U'_0, so ist:

$$\omega|_{U'_0} = \gamma^*_{0,\infty}(\omega|_{U'_\infty}) = \sum_{j=i+1}^{n} k_{i,j} \cdot y_0^{\beta_{i,j}} \cdot x_0^{\alpha_{i,j}} f_i(\frac{1}{x_0}, x_0^a y_0)(dx_0)^{j-i}(dy_0)^{n-j+i}$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= -a \cdot c_i - b_i - j - a \cdot i + a \cdot n \\
\beta_{i,j} &= -c_i + j - i \\
k_{i,j} &= (-1)^i (a)^{j-i} \tbinom{n-i}{j-i}.
\end{aligned}$$

Da $\omega|_{U'_0}$ höchstens logarithmische Pole bei $\{x_0 = 0\}$ haben darf, gilt wie in Gleichung 4.1 für alle $j = i+1, ..., n$ folgende Ungleichung:

$$-n \leq -a \cdot c_i - j - b_i - a \cdot i + a \cdot n$$

Stellen wir die obige Ungleichung nach c_i um und betrachten den Fall $j = n$, so erhalten wir unter der Berücksichtigung, dass $b_i \in \mathbb{N}$ ist:

$$c_i \leq n - i - b_i/a \leq n - i$$

Also ist die Einschränkung einer Form ω, mit beliebigen Polen entlang E, auf U'_∞ eine reguläre pluri-log-Form.
Analog erhalten wir auch, dass ω auf U'_0 als pluri-log-Form keine Pole haben kann. Das heißt, dass jedes ω, mit beliebigen Polen entlang E, auf ganz $\tilde{U}$ zu einer glatten pluri-log-Form fortsetzbar ist.

□

Bemerkung 5.1.2. Lemma 5.1.1 bleibt wahr, wenn man $\tilde{\Delta}$ durch einen Divisor $\tilde{\Delta}'$ ersetzt, welcher nur einfache normale Kreuzungspunkte hat und für den gilt, $(\tilde{\Delta}' - E) \cap E$ ist ein einzelner Punkt.

Bemerkung 5.1.3. Die selbe Aussage gilt auch für holomorphe pluri-log-Formen auf analytischen Umgebungen von E.

Satz 5.1.4. *Sei (Z, Δ) ein reduziertes Paar und $\gamma : (\tilde{Z}, \tilde{\Delta}) \to (Z, \Delta)$ eine logarithmische Auflösung mit exzeptionellen Ort E.*
Sei E eine einzige $(-a)$-Kurve die $\tilde{\Delta} - E$ höchstens eimal schneidet, $U \subset Z$ eine offene Mene mit Urbild $\tilde{U} := \gamma^{-1}(U)$ und

$$\omega \in H^0\left(\tilde{U} \setminus E, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}\setminus E}(\log \tilde{\Delta}))\right).$$

Ist $E \subset \tilde{\Delta}$ so existiert eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{U}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}}(\log \tilde{\Delta}))\right)$$

von ω auf ganz $\tilde{U}$. Ist $E \cap \tilde{\Delta} = \emptyset$, so existiert eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{U}, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}}(\log(\tilde{\Delta} + E)))\right)$$

auf ganz $\tilde{U}$.

Bemerkung. Nach Lemma 1.2.5 gilt entweder $E \cap \tilde{\Delta} = \emptyset$ oder $E \subset \tilde{\Delta}$. Satz 5.1.4 deckt also alle möglichen Fälle ab.

Beweis. Zunächst zur zweiten Behauptung:
Da $\tilde{\Delta} \cap E = \emptyset$, reicht es $\omega|_{\tilde{U}\setminus\tilde{\Delta}}$ zu betrachten. Dann sind wir aber in der Situation von Satz 4.1.6 und erhalten somit eine Fortsetzung

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\tilde{U} \setminus \tilde{\Delta}, \mathcal{I}_E^{\lceil \frac{n}{a} \rceil} \otimes \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{U}\setminus\tilde{\Delta}}(\log \tilde{\Delta} + E))\right).$$

Da ω entlang von $\tilde{\Delta}$ regulär war ist $\tilde{\omega}$ eine Fortsetzung auf ganz $\tilde{U}$. Kommen wir nun zur ersten Behauptung:
Mit Fakt 4.1.2 existiert ein Isomorphismus von einer analytisch offenen Umgebung von E in eine analytische Umgebung vom Nullschnitt E' in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$. Angenommen es gäbe ein ω, welches man nicht fortsetzen könnte, das heißt ω hat mehr als logarithmische Pole entlang E. Dann hätte $(f^{-1})^*(\omega)$ mehr als logarithmische Pole entlang E', was im Widerspruch zu Bemerkung 5.1.3 steht. Somit existiert eine Fortsetzung von ω auf ganz $\tilde{U}$.

Bemerkung 5.1.5. Ist der Randdivisor nicht die leere Menge, so ist das obige Ergebnis für beliebige $(-a)$-Kurven optimal.

Beweis. Betrachten wir nochmals $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ mit Standard-Überdeckung U_0, U_∞, lokalen Koordinaten (x_i, y_i) und $\tilde{\Delta}$ wie in Lemma 5.1.1. Dann setzt sich

$$\omega_\infty = \frac{1}{y_\infty^n} \cdot (dy_\infty)^n \in H^0\left(U_\infty, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{U_\infty}(\log \tilde{\Delta}))\right)$$

zu einer Form $\omega \in H^0\left(\mathcal{O}(-a), \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\mathcal{O}(-a)}(\log \tilde{\Delta}))\right)$ fort, da

$$\gamma^*_{0,\infty}(\omega_\infty) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{x_0^i y_0^{n-i}} (dx_0)^i (dy_0)^{n-i}}_{\in H^0\left(U_0, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{U_0}(\log \Delta))\right)}$$

ist.
Beachte ω hat die maximale Polstellenordnung. □

5.2 Randdivisoren, welche die $(-a)$-Kurve in mehr als einem Punkt schneiden

In diesem letzten Abschnitt möchte wir zeigen, dass man den Randdivisor $\tilde{\Delta}$ auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ nicht beliebig wählen kann:

Lemma 5.2.1. *Sei $\tilde{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ mit Nullschnitt E Standard-Überdeckung U_0, U_∞ und Koordinaten (x_i, y_i) und Koordinatenübergang $\gamma_{0,\infty} : (x_0, y_0) \to (\frac{1}{x_0}, y_0 \cdot x_0^a)$. Ist $\tilde{\Delta} = E + \sum_{i=1}^{a+2} E_i$, mit $E_i \cap U_\infty = \{x_\infty - i = 0\}$ so existiert ein*

$$\omega \in H^0(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta})))(*E)) \setminus H^0(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta}))))$$

das heisst es existieren Differentialformen die mehr als logarithmische Pole entlang E haben.

Beweis. Betrachte

$$\omega = \tfrac{1}{y_\infty} \cdot \tfrac{1}{\prod_{i=1}^{a+2}(x_\infty - i)^n} (dx_\infty)^n$$

$\omega|_{U_\infty \setminus \tilde{\Delta}}$ ist eine reguläre Differential Form und für jeden Punkt $p_i \in E_i$ kann ω auf $U^{p_i} = U_\infty \setminus (\tilde{\Delta} \setminus (E + E_i))$ wie folgt geschrieben werden

$$\omega|_{U^{p_i}} = f^{p_i}(x_\infty, y_\infty) \frac{1}{(x_\infty - i)^n} (d(x_\infty - 1))^n \quad \text{mit} \quad f^{p_i} \in \mathcal{O}_{U^{p_i}}(*E)$$

somit gilt also

$$\omega \in H^0(U_\infty, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta})))(*E)) \setminus H^0(U_\infty, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta})))).$$

Zuzeigen ist nun, dass sich ω zu einer Form

$$\omega \in H^0(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta})))(*E)) \setminus H^0(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta}))))$$

fortsetzt. Dazu betrachte ω auf $U_\infty \cap U_0$ in den Koordinaten von U_0

$$\begin{aligned} \gamma^*_{0,\infty}(\omega) &= \tfrac{1}{y_0 x_0^a} \cdot \tfrac{1}{\prod_{i=1}^{a+2}(\frac{1}{x_0}-i)^n}(d\tfrac{1}{x_0})^n \\ &= (-1)^n \tfrac{1}{y_0 x_0^a} \cdot \tfrac{x_0^{a+2n}}{\prod_{i=1}^{a+2}(-ix_0+1)^n} \cdot \tfrac{1}{x_0^{2n}}(dx_0)^n \\ &= (-1)^n \tfrac{1}{y_0} \cdot \tfrac{1}{\prod_{i=1}^{a+2}(-ix_0+1)^n}(dx_0)^n \end{aligned}$$

Da $E_i \cap U_0 = \{1 - ix_0 = 0\}$ ist setzt sich $\gamma^*_{0,\infty}(\omega)$ auf ganz U_0 fort, dass heißt:

$$\gamma^*_{0,\infty}(\omega) \in H^0(U_0, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta})))(*E)) \setminus H^0(U_0, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log(\tilde{\Delta}))))$$

ω setzt sich also auf ganz $\tilde{Z}$ zu einer Form der gewünschten Gestalt fort. $\square$

Offen sind noch folgende Fragen:

1. Wie viele Schnittpunkte darf ein Divisor, mit einfachen normalen Kreuzungspunkten, maximal mit einer $(-a)$-Kurve E haben, sodass pluri-log-Formen über E fortsetzbar sind?

2. Existiert eine andere obere Schranke für die Polstellenordnung von pluri-log-Formen $\omega \in H^0(\tilde{Z}, \mathrm{Sym}^n(\Omega^1_{\tilde{Z}}(\log \Delta)(*E))$ wobei E eine einzelne $(-a)$-Kurve ist, Δ nur einfache normale Kreuzungspunkte hat und $\Delta \cap E$ aus k-Punkten besteht?

Notation

$\mathcal{O}_X$	Garbe der regulären Funktionen auf X
$\mathcal{O}_X^{hol}$	Garbe der holomorphen Funktionen auf X
(Z, Δ)	reduziertes Paar
Ω_X^1	Garbe der regulären 1-Formen auf X
$(\Omega_X^1)^{hol}$	Garbe der holomorphen 1-Formen auf X
$\Omega_X^1(\log \Delta)$	Garbe der logarithmischen 1-Formen
$(\Omega_X^1)^{hol}(\log \Delta)$	Garbe der holomorphen logarithmischen 1-Formen auf X
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$	Aufblasung des Kegels über einer rationalen Kurve vom Grad a
$\mathcal{I}_E$	Idealgarbe des Divisors E
$\lceil b \rceil$	Minimum aller $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq b$
$\otimes$	Tensorprodukt über $\mathcal{O}_X$

Literaturverzeichnis

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a View Toward Algebraic Geometry.

[EV92] Hélène Esnault and Eckart Viehweg. *Lectures on vanishing theorems*, volume 20 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Iit82] Shigeru Iitaka. *Algebraic geometry*, volume 76 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction to birational geometry of algebraic varieties, North-Holland Mathematical Library, 24.

[KK83] Ludger Kaup and Burchard Kaup. *Holomorphic functions of several variables*, volume 3 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983. An introduction to the fundamental theory, With the assistance of Gottfried Barthel, Translated from the German by Michael Bridgland.

[KK07] Stephan Kebekus and Sandor Kovacs. The structure of surfaces mapping to the moduli stack of canonically polarized varieties. arXiv:0707.2054v1, 07 2007.

[Rei97] Miles Reid. Chapters on algebraic surfaces. In *Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993)*, volume 3 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 3–159. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry. 1.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.