Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 1
03.09.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 09.04.

1. Seien A, B Teilmengen eines metrischen Raumes X. Sind die folgenden Identitäten im Allgemeinen wahr? Beweisen Sie jeweils oder widerlegen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels.
   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
   c) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.
   d) $\mathrm{int}(A \cup B) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$

2. Ein metrischer Raum X heißt diskret, wenn $\{x\}$ offen ist in X für jedes $x \in X$. Zeigen Sie: Ein diskreter metrischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn X endlich ist.

3. Es seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls $f(O) \subset Y$ offen ist für jede offene Teilmenge $O \subset X$. Analog heißt f abgeschlossen, falls $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$. Finden Sie ein Beispiel fur eine Abbildung, die offen aber nicht abgeschlossen ist, und ein Beispiel fur eine Abbildung, die abgeschlossen aber nicht offen ist. Sind die folgenden Abbildungen offen oder abgeschlossen?
   a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x$.
   b) $q : \mathbb{R} \to S^1; x \mapsto (\cos x, \sin x)$, wobei S^1 den Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

4. Bestimmen sie für die folgenden Teilmengen A_i von R^2 jeweils $\mathrm{int}(A_i)$, $\overline{A_i}$ und ∂A_i. Ist A_i kompakt? Ist A_i zusammenhängend?
   a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$.
   b) $A_2 = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
   c) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 - x^3 = 0\}$.
   d) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^4 + e^{-2x \sin(y^2)} < -1\}$
   e) $A_5 = \{(t, \ln(t)) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$.
   f) $A_6 = \{(t, \sin(t^{-1})) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

   Ist $\overline{A_6}$ zusammenhängend? Ist $\overline{A_6}$ wegzusammenhängend?