Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 10
05.06.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 18.06.

1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi_1 : U_1 \to V_1, \varphi_2 : U_2 \to V_2$ Karten von M, sodass $M = U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie:

   a) Ist $U_1 \cap U_2$ zusammenhängend, so ist M orientierbar.

   b) Ist $U_1 \cap U_2$ nicht zusammenhängend, so muss M im Allgemeinen nicht orientierbar sein.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

   a) $\mathbb{C}P^n$ ist orientierbar.

   b) $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $i(x) = -x$ ist orientierungserhaltend genau dann, wenn n ungerade ist.

   c) $\mathbb{R}P^n$ ist orientierbar genau dann, wenn n ungerade ist.
   Hinweis: Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe b).

3. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M, sodass $V_p \neq 0$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, dass es einen Diffeomorphismus $f : M \to M$ gibt mit $f(p) \neq p$ für alle $p \in M$.
   Hinweis: Ist $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ der zu V gehörige Fluß, so kann man $f = \Phi_t$ wählen für t klein genug.

4. Sei M^n eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to V$ eine Karte von M und $p \in U$. Zeigen Sie:

   a) Es gibt eine Umgebung $W \subset U$ von p und $\phi : M \to [0,1]$ glatt, sodass $\overline{\{q \in M | \phi(q) \neq 0\}} \subset U$ und $\phi(q) = 1$ genau dann, wenn $q \in \overline{W}$.

   b) Es gibt eine Umgebung $W \subset U$ von p und $f : M \to \mathbb{R}^n$ glatt, sodass gilt $f_{|W} = \varphi_{|W}$.

   c) Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und eine glatte Einbettung $M \to \mathbb{R}^m$.