Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 11
19.06.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 02.07.

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2^2, x_1^3 x_2 x_3)$ und $\omega = f(y_1, y_2)\, dy_1 \wedge dy_2$, wobei
$$f(y_1, y_2) = \frac{y_1 \cdot \sin(y_2^2) + e^{\arctan(y_1 y_2)^2}}{y_2^2 + 2 + \sin(y_1 y_2)}.$$
Berechnen Sie $\varphi^* \omega$ und $d(\varphi^* \omega)$.

2. Sei $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.
   a) Berechnen Sie $d\omega$.
   b) Sei $P : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}), P(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Berechnen Sie $P^* \omega$.
   c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gibt mit $df = \omega$. *Hinweis:* Verwenden Sie Teilaufgabe b).

3. Sei V ein Vektorraum. Eine 2-Form $\omega \in \Lambda^2 V^*$ heißt zerlegbar, wenn es 1-Formen $\eta, \nu \in \Lambda^1 V^*$ gibt, sodass $\omega = \eta \wedge \nu$. Zeigen Sie:
   a) Jede 2-Form $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ist zerlegbar.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass für $\eta = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3, \nu = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$ gilt $\eta \wedge \nu = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$, wobei $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$
   b) Es gibt eine unzerlegbare 2-Form $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$.
   Hinweis: Finden Sie $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ mit $\omega \wedge \omega \neq 0$.