

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

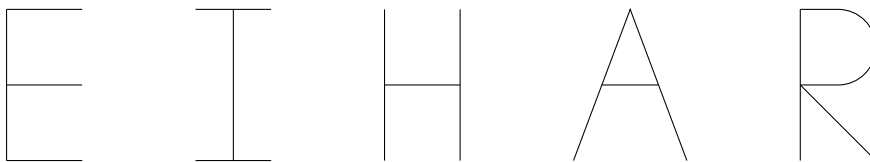
Besprechung: In der Übung am 16.04.

1. Seien D_1 und D_2 offene Scheiben im \mathbb{R}^2 , so dass sich \overline{D}_1 und \overline{D}_2 in genau einem Punkt schneiden. Bestimmen sie welche der folgenden Teilmengen A_i von \mathbb{R}^2 zusammenhängend sind:

- a) $A_1 = D_1 \cup D_2$
 b) $A_2 = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$
 c) $A_3 = \overline{D}_1 \cup D_2$

Bei welchen der zusammenhängenden A_i gibt es Schnittpunkte?

2. Sei $X_1 := \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, $X_2 := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $X_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$. Betrachten Sie X_i jeweils mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Teilraummetrik. Bestimmen sie jeweils die Zusammenhangskomponenten der X_i und folgern Sie, dass X_i nicht homöomorph ist zu X_j für $i \neq j$.
3. Welche der folgenden Buchstaben sind homöomorph zu einander, wenn betrachtet mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Teilraummetrik?



Ein wichtiger Hinweis. Eine in der Vorlesung an der Tafel stehende Aussage muss wie folgt korrigiert werden:

Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ ist ein Schnittpunkt von X genau dann, wenn es offene disjunkte Teilmengen U_1, U_2 von $X \setminus \{x\}$ gibt, so dass $U_1 \cup U_2 = X \setminus \{x\}$ und für die Abschlüsse \overline{U}_1 und \overline{U}_2 von U_1, U_2 in X die Gleichheit $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \{x\}$ gilt. (In der Vorlesung stand die Aussage ohne die abgeschlossene Hülle da). Eine äquivalente Aussage ist, dass es abgeschlossene Mengen A_1, A_2 in X gibt, die beide nicht nur aus $\{x\}$ bestehen und so dass $A_1 \cap A_2 = \{x\}$ und $A_1 \cup A_2 = X$ gilt.

4. Sei $n \geq 2$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass U keinen Schnittpunkt besitzt. (Tipp: Verwenden Sie den obigen Hinweis und schauen Sie sich kleine Bälle um den möglichen Schnittpunkt an.)