Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 3
17.04.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 23.04.

1. Sei X eine dreielementige Menge. Wie viele verschiedene Metriken gibt es auf X bis auf Homöomorphismus? Wie viele verschiedene Topologien gibt es auf X bis auf Homöomorphismus?

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilräume von $\mathbb{R}^2$ paarweise homöomorph sind.

   a) $A_1 := [0,1] \times [0,1)$

   b) $A_2 := \{(x, y \in \mathbb{R}^2| \, |(x,y)| \leq 1, y > 0\}$

   c) $A_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2| \, |(x,y)| \leq 1, x > 0, y > 0\}$

   d) $A_4 := [0,1) \times [0,1)$

   (Tipp: Zeigen Sie $A_1 \cong A_2 \cong A_3 \cong A_4$ und verwenden Sie Polarkoordinaten um den mittleren Homöomorphismus zu zeigen.)

3. Eine Teilmenge S eines topologischen Raums X heißt dicht in X, wenn $\bar{S} = X$ gilt. Beweisen Sie:

   a) Hat X eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n, ...\}$, so hat X eine abzählbare dichte Teilmenge.

   b) Ist X ein metrischer Raum und S eine abzählbare dichte Teilmenge in X, so hat X eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$.

4. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie auf $\mathbb{R}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{[a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ und sei $\mathbb{R}_h := (\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Zeigen Sie:

   a) $\mathbb{R}_h$ ist nicht zusammenhängend.

   b) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}_h$.

   c) $\mathbb{R}_h$ besitzt keine abzählbare Basis. (Tipp: Zeigen Sie, dass wenn $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis ist von $\mathcal{T}$, dann gilt $\mathbb{R} \subset \{\inf B | \, B \in \mathcal{B}'\}$).

   d) $\mathbb{R}_h$ ist nicht metrisierbar. Das heißt es gibt keine Metrik d auf $\mathbb{R}$, sodass $\mathcal{T}$ die von d induzierte Topologie ist.