Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 4
24.04.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 30.04.

1. Sei X ein topologischer Raum und A, B kompakte Teilmengen von X. Zeigen Sie:

   a) $A \cup B$ ist kompakt.

   b) Ist X Hausdorff, so ist $A \cap B$ kompakt.

2. $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X^* := X \sqcup \{\infty\}$. Definiere

$$\mathcal{T}^* := \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus A | A \subset X \text{abgeschlossen und kompakt}\}.$$

   Zeigen Sie:

   a) $X^* = (X^*, \mathcal{T}^*)$ ist ein kompakter topologischer Raum. (Man nennt X^* die Einpunktkompaktifizierung von X.)

   b) X^* ist Hausdorffsch genau dann, wenn X ist Hausdorffsch und lokal-kompakt.

   c) $\mathbb{R}^*$ ist homöomorph zu $S^1 := \{v \in \mathbb{R}^2 | \ |v| = 1\}$.

3. Es sei X ein topologischer Raum. Wir versehen $X \times X$ wie immer mit der Produkt-Topologie. Beweisen Sie:

   a) Die Diagonalenabbildung $\Delta : X \to X \times X;\ x \mapsto (x, x)$ ist stetig.

   b) $\Delta : X \to \Delta(X)$ ist eine Homöomorphismus.

   c) Die Diagonale $\Delta(X)$ ist abgeschlossen in $X \times X$ genau dann, wenn X ein Hausdorff-Raum ist.

   d) Sei Y ein weiterer topologischer Raum und seien $f, g : Y \to X$ zwei stetige Abbildungen. Ist X ein Hausdorff-Raum, so ist die Menge A der Punkte $y \in Y$ mit $f(y) = g(y)$ abgeschlossen in Y.
   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe c).

4. Es sei $L_n \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $L_n := \{\{(t, \frac{t}{n}) \in \mathbb{R}^2 | \ t \in [0, 1]\}$ und $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} L_n$. Wir definieren eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X durch $O \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $O \cap L_n$ offen ist in L_n für alle $n \in \mathbb{N}$ bezüglich der Teilraumtopologie induziert von $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{T}$ definiert eine Topologie auf X.

b) $(X, \mathcal{T})$ ist normal.

c) $(X, \mathcal{T})$ ist nicht metrisierbar.
Hinweis: Nehmen Sie an d ist eine Metrik, die $\mathcal{T}$ metrisiert. Konstruieren Sie eine Folge in X, die gegen $(0, 0)$ konvergiert bezüglich d aber nicht bezüglich $\mathcal{T}$.