Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 07.05.

1. Sei $0 < p_1 < p_2 < ... < p_n < 1$ und $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n < 1$. Zeigen Sie: Es gibt einen Homöomorphismus $f : [0,1] \to [0,1]$, so dass $f(p_i) = q_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

2. Sei $D^n := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ und M eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

   a) Für alle $p, q \in \operatorname{int}(D^n)$ gibt es einen Homöomorphismus $f : D^n \to D^n$, sodass $f(p) = q$ und $f(x) = x$ für alle $x \in \partial D^n$.
   Hinweis: Zeigen Sie die Aussage für $[0,1]^n$ statt D^n, indem Sie Aufgabe 1 verwenden.

   b) Für alle $p, q \in M$ gibt es einen Homöomorphismus $f : M \to M$, sodass $f(p) = q$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Menge

   $$A = \{r \in M \mid \exists f : M \to M \text{ Homöomorphismus: } f(p) = r\}$$

   und verwenden Sie Teilaufgabe a) um zu zeigen, dass $A = M$.

3. Sei $f : \partial D^n \to \partial D^n$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus $g : D^n \to D^n$ gibt mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \partial D^n$.

4. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $0 < r < s$. Zeigen Sie:

   a) Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und $f(t) > 0$ für $t > 0$.
   Hinweis: Definieren Sie $f(t) = e^{-1/t}$ für $t > 0$.

   b) Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $g(t) > 0$ für $t \in (0, r)$ und $g(t) = 0$ für $t \notin (0, r)$.
   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

   c) Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \to [0,1]$, sodass $h(t) = 0$ für $t < 0$ und $h(t) = 1$ für $t > r$.
   Hinweis: Betrachten Sie

   $$h(t) = \frac{\int_0^t g(y)\ dy}{\int_0^r g(y)\ dy}.$$

d) Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $k : \mathbb{R} \to [0, 1]$, sodass $k(t) = 1$ für $t \in (-r, r)$ und $k(t) = 0$ für $t \notin (-s, s)$.
Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe c).

e) Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Funktion $l : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, sodass $l(y) = 1$ für $y \in B_r(x)$ und $l(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_s(x)$.
Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe d).