Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 6
08.05.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 14.05.

1. Zeigen Sie, dass die Verkettung zweier Quotientenabbildungen eine Quotientenabbildung ist.

2. Zeigen Sie, dass Quotientenabbildungen $D^2 \to S^1$, $S^2 \to D^2$, $S^2 \to S^1$, $S^2 \to S^1 \times S^1$ und $S^1 \times S^1 \to S^2$ existieren. (Sie brauchen keine expliziten Formel anzugeben. Eine präzise geometrische Beschreibung reicht.)

3. Zeigen Sie, dass die Kleinsche Flasche K^2 und der projektive Raum P^2 topologische Mannigfaltigkeiten sind.

4. **(Endliche Graphen)**
   Sei $Y = \bigsqcup_{i=1}^n I_i$ eine disjunkte Vereinigung kompakter Intervalle. Sei V die Menge aller Endpunkte der Intervalle I_i und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V. Erweitere $\sim$ auf Y indem man $x \sim x$ setzt für $x \in Y \setminus V$ und ansonsten keine weiteren Relationen einführt. Sei $X := Y/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie:

   a) X ist ein kompakter Hausdorff Raum mit einer abzählbaren Basis.

   b) X ist eine topologische Mannigfaltigkeiten genau dann, wenn für jeden Endpunkt x eines Intervalls I_i gilt, dass die zu x gehörige Äquivalenzklasse genau 2 Elemente hat.

   c) Ist X eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, so ist X homöomorph zu S^1. (Zeigen Sie dies ohne den Klassifikationssatz für 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu verwenden.)