Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 8
22.05.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 28.05.

1. Seien $\varphi_1 : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ und $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\varphi_1(t) := (t^2, t^3 - t), \qquad \varphi_2(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(\sqrt{2} \cdot t), \sin(\sqrt{2} \cdot t))$$

   Zeigen Sie für $i = 1, 2$:

   a) φ_i ist eine injektive Immersion.
   b) $\operatorname{im}(\varphi_i)$ versehen mit der Teilraumtopologie ist keine topologische Mannigfaltigkeit.
   c) φ_i ist keine Einbettung.

   Definition: Eine Teilmenge M einer glatten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit N heißt m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jede Karte $\varphi : U \to V$ die Teilmenge $\varphi(U \cap M) \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte m-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

2. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und Γ resp. Σ Untermannigfaltigkeiten von M resp. N und $f : M \to N$ glatt. Zeigen Sie:

   a) Es gibt glatte Atlanten auf Γ und Σ, sodass die Einbettungen $\Gamma \hookrightarrow M$ und $\Sigma \hookrightarrow N$ glatt sind.
   b) Die Einschränkung von f auf Γ ist eine glatte Abbildung $\Gamma \to N$.
   c) Ist $f(M) \subset \Sigma$, so ist f auch als Abbildung $M \to \Sigma$ glatt.